$$= \frac{-27}{5} \times (\frac{-1}{9} - \frac{1}{6}) = -\frac{27}{5} \times \frac{-2-3}{18} = (-\frac{27}{\cancel{5}})(\frac{-\cancel{5}}{18}) = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

گزینه‌های «۱» و «۳» به ازای $x = -1$ تعریف‌نشده هستند در گزینه‌ی «۲» هم داریم:

$$x - 2 = (-1) - 2 = -3 \neq \frac{3}{2}$$

بنابراین پاسخ درست گزینه‌ی «۴» است.

۴۱۶. گزینه ۱

$$(3t-2)^2 = 4 \xrightarrow[\text{جذربگیر}]{\text{از دو طرف}} \begin{cases} 3t-2 = \sqrt{4} \Rightarrow 3t-2 = 2 \\ \text{یا} \\ 3t-2 = -\sqrt{4} \Rightarrow 3t-2 = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+2} \begin{cases} 3t = 4 \\ \text{یا} \\ 3t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\div 3} \begin{cases} t = \frac{4}{3} \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

زرنگی:

$$(3t-2)^2 = 4 \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 9t^2 - 12t = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{9} = \frac{4}{3}$$

۴۱۷. گزینه ۲ معادله‌ی $3x^2 + 7x = 0$ فاقد عدد ثابت است $(c = 0)$، بنابراین روش فاکتورگیری را به یاد می‌آوریم و...

$$3x^2 + 7x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور از } x} x(3x+7) = 0 \xrightarrow{\text{ویژگی حاصل‌ضرب صفر}}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ 3x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف دو ریشه} = |0 - (\frac{-7}{3})| = \frac{7}{3}$$

زرنگی:

$$3x^2 + 7x = 0 \xrightarrow{\text{اختلاف ریشه‌ها}} \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{49 - 4(3)(0)}}{3} = \frac{7}{3}$$

۴۱۸. گزینه ۳ می‌دانیم که مهم‌ترین ویژگی ریشه یا جواب یک معادله این است که در معادله صدق می‌کند: بنابراین اگر $x = p$ ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشد، می‌توان نوشت:

$$2x^2 + 3x - 1 = 0 \xrightarrow[\text{قرار بده}]{x=p} 2p^2 + 3p - 1 = 0 \Rightarrow 2p^2 + 3p = 1 \quad ⊛$$

اکنون برای محاسبه‌ی مقدار عبارت $2p^2 + 3p + 4$ کافی است به جای $2p^2 + 3p$ با توجه به ⊛، مقدار آن را قرار دهیم:

$$2p^2 + 3p + 4 = 1 + 4 = 5$$

۴۱۹. گزینه ۲ در عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$، اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد، آن‌گاه عبارت قابل تجزیه نبوده و معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ نیز فاقد ریشه خواهد بود. در گزینه‌ی «۲» داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(4)(8) = 100 - 128 = -28 < 0$$

در نتیجه عبارت تجزیه‌ناپذیر است.

بررسی سایر گزینه‌ها و نیز حل معادله‌ی مربوطه به عهده‌ی خودتون!

۴۲۰. گزینه ۴ چون ضریب x^2 برابر یک است، کافی است به دو طرف، $(\frac{\text{ضریب } x}{2})^2$ را اضافه کنیم: یعنی کافی است به دو طرف، عدد یک را اضافه کنیم:

$$(\frac{\text{ضریب } x}{2})^2 = (\frac{2}{2})^2 = 1$$

۴۲۱. گزینه ۱ معادله را از روش کلی حل می‌کنیم:

$$\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} \underset{(a=2,\, b=-3,\, c=-9)}{2t^2 - 3t - 9 = 0} \xrightarrow[=9+72=81]{\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9)}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} \xrightarrow{\text{دو حالت دارد}} \begin{cases} t_1 = \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ \text{یا} \\ t_2 = \frac{3-9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

زرنگی:

$$\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \xrightarrow{\times 6} 2t^2 - 3t - 9 = 0$$

گزینه‌ای درست است که ضرب ریشه‌هایش $-\frac{9}{2}$ و جمع آن‌ها $\frac{3}{2}$ باشد...

۴۲۲. گزینه ۳

① $x = -1 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow (3m+1) + (2-5m) = -5$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} -2m + 3 = -5 \xrightarrow{\text{حل‌کن}} -2m = -8 \Rightarrow m = 4$$

② $x = -1 \xrightarrow{\text{ریشه‌ی دیگر}} x = -\frac{c}{a} = -\frac{2-5m}{3m+1} \xrightarrow{m=4}$

$$x = -\frac{2-20}{12+1} = \frac{18}{13} \Rightarrow m + \text{ریشه‌ی دیگر} = 4 + \frac{18}{13} = \frac{52+18}{13} = \frac{70}{13}$$

۴۲۳. گزینه ۳ داشتن دو ریشه‌ی مساوی در یک معادله‌ی درجه‌ی دوم به معنای داشتن ریشه‌ی تکراری یا مضاعف بوده و شرطش این است که دلتای آن معادله صفر شود.

$$x(2x-5) = a \xrightarrow{\text{ساده و مرتب‌کن}} 2x^2 - 5x = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(2)(-a) = 0 \Rightarrow 25 + 8a = 0 \Rightarrow 8a = -25 \Rightarrow a = \frac{-25}{8}$$

$$\xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{در معادله}} 2x^2 - 5x + \frac{25}{8} = 0 \xrightarrow[x = x_S = \frac{-b}{2a}]{\text{فرمول ریشه‌ی مضاعف}} x = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

این‌جوری هم ببین: تست فقط مقدار ریشه‌ی مضاعف رو خواسته و ما می‌دانیم که در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مقدار ریشه‌ی مضاعف از دستور $x = x_S = \frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید:

$$x(2x-5) = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

$$\xrightarrow{\text{بدون توجه به مقدار } a} x = x_S = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4} \quad (\text{ریشه‌ی مضاعف معادله})$$

۴۲۴. گزینه ۱ اگر سن برادر کوچک‌تر را x و سن برادر بزرگ‌تر را y فرض کنیم، بر اساس گفته‌های سؤال داریم:

① برادر بزرگ‌تر ۴ سال از برادر کوچک‌تر، بزرگ‌تره؛ یعنی:

$y = x + 4$ یا $y - x = 4$

② ۴ سال دیگر، سن برادر کوچک‌تر $x + 4$ سال و سن برادر بزرگ‌تر $y + 4$ سال می‌شود؛ در نتیجه:

$$(x+4)(y+4) = 60 \xrightarrow[\text{قرار بده } y]{\text{به‌جای } x+4} y(y+4) = 60$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} \underset{(a=1,\, b=4,\, c=-60)}{y^2 + 4y - 60 = 0}$$

$$\xrightarrow{\text{حل از } \Delta} \Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-60) = 16 + 240 = 256$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$\xrightarrow[\sqrt{256} = 16]{\text{دو حالت دارد}} \begin{cases} y = \frac{-4+16}{2} = \frac{12}{2} = 6 \checkmark \Rightarrow y = 6,\ x = 2 \\ \text{یا} \\ y = \frac{-4-16}{2} = \frac{-20}{2} = -10 \times \quad (\text{سن منفی بی‌معناست.}) \end{cases}$$

بنابراین هم‌اکنون برادر بزرگ‌تر ۶ سال و برادر کوچک‌تر ۲ سال دارد.

۴۲۵. گزینه ۳ آن دو عدد طبیعی فرد متوالی را $2n-1$ و $2n+1$ در نظر می‌گیریم؛ پس: $(2n-1)^2+(2n+1)^2=290$

$$\xrightarrow{\text{اتحادها رو باز کن}} (4n^2-4n+1)+(4n^2+4n+1)=290$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 8n^2+2=290 \xrightarrow{-2} 8n^2=288$$

$$\xrightarrow{\div 8} n^2=36 \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} n=\pm 6 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{عدد فرد اول} = 2(6)-1=11 \\ \text{عدد فرد بعدی}=2(6)+1=13\end{cases}$$

$\Rightarrow$ حاصل‌ضرب این دو عدد $=11\times 13=143$

۴۲۶. گزینه ۲ معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta=b^2-4ac<0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی است:

$$\underset{(a=m,b=m,c=1)}{mx^2+mx+1=0} \Rightarrow \Delta=m^2-4m<0$$

$$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} m^2-4m=0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} m(m-4)=0$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی حاصل ضرب صفر}} \begin{cases} m=0\\ \text{یا}\\ m-4=0\Rightarrow m=4\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{جدول}}$

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
m^2-4m	$+$		$-$ ✓		$+$

$\xrightarrow{\text{هدف اینکه } m^2-4m<0 \text{ بشه}}$ حدود m: $0<m<4$

حالا به نظر شما برای کدام مقادیر m، عبارت mx^2+mx+1 همواره مثبت می‌شه؟!

زرنگی:

$m=-1 \xrightarrow{\text{در معادله}} -x^2-x+1=0$

$\Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(-1)(1)=5>0 \Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد

پس گزینه‌های «۱» و «۴» که $m=-1$ را قبول دارند غلط هستن!

$m=5 \xrightarrow{\text{در معادله}} 5x^2+5x+1=0$

$\Rightarrow \Delta=5^2-4(5)(1)=5>0\Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد

پس گزینه‌ی «۳» هم غلطه!

۴۲۷. گزینه ۳ Δ را محاسبه کرده و بعد گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$ax^2+x+3=0 \xrightarrow[\Delta=b^2-4ac]{a=a,b=1,c=3} \Delta=1^2-4(a)(3)=1-12a$$

گزینه‌ی «۱»: $a=\frac18 \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بذار}} \Delta=1-12(\frac18)=-\frac12$

$\xrightarrow{\Delta<0}$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. ×

گزینه‌ی «۲»: $a=\frac1{12} \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بذار}} \Delta=1-12(\frac1{12})=0$

$\xrightarrow{\Delta=0}$ ریشه‌ی مضاعف دارد. ×

گزینه‌ی «۳»: $a=\frac16 \xrightarrow{\text{در } \Delta \text{ بذار}} \Delta=1-12(\frac16)=-1$

$\xrightarrow{\Delta<0}$ ریشه‌ی حقیقی ندارد. ✓

درباره‌ی گزینه‌ی «۴»، اگر a عددی منفی باشد، $-12a$ مثبت شده و $-12a+1$ هم قطعاً مثبت خواهد بود، بنابراین همواره دو ریشه‌ی حقیقی خواهیم داشت. ×

۴۲۸. گزینه ۲ ریشه‌ی معادله در معادله صدق می‌کند؛ پس:

$2\alpha^2-\alpha-2=0 \Rightarrow 2\alpha^2=\alpha+2$ ✲

حالا با توجه به رابطه‌ی ✲ کافی است در عبارت $\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2+\alpha+2}$ به‌جای $\alpha+2$ معادل آن ($2\alpha^2$) را قرار دهیم:

$$\text{حاصل عبارت}=\frac{4\alpha^2}{2\alpha^2+(2\alpha^2)}=\frac{4\alpha^2}{4\alpha^2}=1$$

۴۲۹. گزینه ۴ می‌دانیم اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه معادله به‌صورت $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ قابل تجزیه خواهد بود به‌طوری‌که $\alpha=\frac{-b+\sqrt\Delta}{2a}$ و $\beta=\frac{-b-\sqrt\Delta}{2a}$ ($\Delta=b^2-4ac$).

برای حل این تست ابتدا ریشه‌های معادله‌ی $b^2+\sqrt2 b-4=0$ را از روش Δ به‌دست می‌آوریم:

$$b^2+\sqrt2b-4=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=(\sqrt2)^2-4(1)(-4)=2+16=18} b=\frac{-\sqrt2\pm\sqrt{18}}{2} \xrightarrow{\sqrt{18}=3\sqrt2}$$

$$b=\frac{-\sqrt2\pm3\sqrt2}{2}\Rightarrow b=\frac{2\sqrt2}{2}=\sqrt2 \quad \text{یا} \quad b=\frac{-4\sqrt2}{2}=-2\sqrt2$$

$$\Rightarrow b^2+\sqrt2b-4=(b-\sqrt2)(b+2\sqrt2)$$

این رابطه را با تجزیه‌ی داده‌شده در صورت سؤال ($(b-r)(b+s)$) مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases}r=\sqrt2\\ s=2\sqrt2\end{cases}\Rightarrow \frac rs=\frac{\sqrt2}{2\sqrt2}=\frac12$$

زرنگی: به کمک اتحاد جمله‌ی مشترک داریم:

$$b^2+\sqrt2b-4=(b-\sqrt2)(b+2\sqrt2)$$

با مقایسه‌ی این عبارت با عبارت داده‌شده داریم:

$$(b-\sqrt2)(b+2\sqrt2)=(b-r)(b+s)\Rightarrow\begin{cases}r=\sqrt2\\ s=2\sqrt2\end{cases}\Rightarrow \frac rs=\frac12$$

۴۳۰. گزینه ۳ برای حل معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ به روش مربع کامل، به جایی می‌رسیم که باید از عدد $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ جذر بگیریم. حال اگر این عدد، نامنفی (۰ یا +) باشد، معادله جواب دارد؛ اما اگر این عدد، منفی باشد، مجاز به جذر گرفتن از عدد منفی نیستیم و می‌گوییم معادله فاقد جواب حقیقی است. در معادله‌ی $S^2-3S+3=0$ با توجه به ضرایب ($a=1$، $b=-3$ و $c=3$) مقدار $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ منفی می‌شود و معادله فاقد ریشه‌ی حقیقی است:

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{(-3)^2-4(1)(3)}{4(1)^2}=\frac{9-12}{4}=\frac{-3}{4}$$

زرنگی: می‌توانیم با روش مربع کامل درسنامه پیش برویم:

$$S^2-3S+3=0\Rightarrow S^2-3S=-3\Rightarrow S^2-3S+\frac94=-3+\frac94\Rightarrow\left(S-\frac32\right)^2=-\frac34$$

در این مرحله باید از دو طرف جذر بگیریم؛ پس از $-\frac34$ جذر گرفته می‌شود.

۴۳۱. گزینه ۴ شرط وجود دو ریشه‌ی حقیقی متمایز آن است که $\Delta=b^2-4ac>0$؛ پس:

$$\underset{(a=1,b=-3,c=-m+9)}{x^2-3x-m+9=0} \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4(1)(-m+9)>0$$

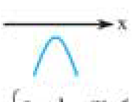
$$\Rightarrow 9+4m-36>0\Rightarrow 4m>27 \xrightarrow{\div4} m>\frac{27}4$$

$$\xrightarrow[=7-0/25=6/75]{\frac{27}{4}=\frac{28-1}{4}=\frac{28}{4}-\frac14} m>6/75 \Rightarrow \text{کوچکترین عدد صحیح } m = 7$$

۴۳۲. گزینه ۲

$$y=(1-m)x^2+2(m-3)x-1$$

$\xrightarrow{\text{شکل مناسب رو رسم کن}}$ سهمی پایین محور x هاست



$\xrightarrow{\text{شرط‌ها رو بنویس}} \begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases} \xrightarrow{\text{محاسبه کن}}$

$$\begin{cases}a=1-m<0\Rightarrow m>1 & (1)\\ \Delta=(2(m-3))^2-4(1-m)(-1)<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = 4(m^2 - 6m + 9) + 4(1 - m) < 0 \xrightarrow{\div 4}$$

$$m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$\Rightarrow (m-5)(m-2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 2 < m < 5 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} 2 < m < 5$$

۴۲۳. گزینه ۳ مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ را برای تک‌تک گزینه‌ها حساب می‌کنیم و گزینه‌ای را که در آن مقدار Δ به ازای مقادیر مختلف m مثبت می‌شود، به‌عنوان گزینه‌ی درست انتخاب می‌کنیم:

گزینه‌ی «۱»: $\Delta = (-m)^2 - 4(1)(1+m^2) = m^2 - 4 - 4m^2$

$= -4 - 3m^2 < 0$ × (حتماً قابل تجزیه نیست!)

گزینه‌ی «۲»: $\Delta = (-1)^2 - 4(m^2+2)(3) = 1 - 12m^2 - 24$

$= -12m^2 - 23 < 0$ × (حتماً قابل تجزیه نیست!)

گزینه‌ی «۳»: $\Delta = (3)^2 - 4(-2)(m^2+2) = 9 + 8m^2 + 16$

$= \underbrace{8m^2 + 25}_{\text{m هرچی باشه این عبارت مثبته}} > 0$ ✓ (این عبارت حتماً قابل تجزیه است!)

گزینه‌ی «۴»: $\Delta = (-3)^2 - 4(m+1)(m) = 9 - 4m^2 - 4m$

$= -4m^2 - 4m + 9$ ×

(این عبارت نیز به ازای همه‌ی مقادیر m همواره مثبت نیست!)

زرنگی:

راهبرد: در عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ اگر $ac < 0$ (یعنی a و c علامتی مخالف هم داشته باشند)، آن‌گاه $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (همواره مثبت) بوده و عبارت همواره قابل تجزیه خواهد بود.

در این تست شرط $ac < 0$ فقط در گزینه‌ی «۳» مشهود است...

گزینه‌ی «۳»: $-2x^2 + 3x + m^2 + 2 \xrightarrow[c=m^2+2]{a=-2} ac = -2(\underbrace{m^2+2}_{\text{همواره}\oplus}) < 0$ ✓

$\xrightarrow[c=m^2+2]{a=-2} ac = -2(\underbrace{m^2+2}_{\text{همواره}\oplus}) < 0$ ✓

۴۲۴. گزینه ۱ در معادله‌ی داده‌شده، داریم:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - \sqrt{3} \\ c = \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

بنابراین: $\text{مقدار موردنظر} = |\underbrace{\sqrt{1} - \sqrt{\sqrt{3}}}_{\text{منفی}}| + \sqrt{1} + \sqrt{\sqrt{3}}$

$$= (\sqrt{\sqrt{3}} - 1) + \sqrt{\sqrt{3}} + 1 = 2\sqrt{\sqrt{3}} = 2\sqrt[4]{3}$$

۴۲۵. گزینه ۳ هدف تست، حل معادله‌ی $0/006s^2 - 0/02s + 120 = 124$ یا $0/006s^2 - 0/02s - 4 = 0$ است. اگر طرفین را در ۱۰۰۰ ضرب کنیم، به معادله‌ی سرراست‌تر زیر می‌رسیم:

$$6s^2 - 20s - 4000 = 0 \xrightarrow{\div 2} \underset{(a=3,\, b=-10,\, c=-2000)}{3s^2 - 10s - 2000 = 0}$$

$$\xrightarrow[\Delta=(-10)^2-4(3)(-2000)=24100]{\text{از }\Delta\text{ برو}} s = \frac{10 \pm \sqrt{24100}}{6}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{24100}=10\sqrt{241}\simeq 10(15/5)=155} s = \frac{10 \pm 155}{6}$$

$$\Rightarrow s = \frac{165}{6} = 27/5 \ ✓ \quad , \quad s = \frac{-145}{6} < 0 \ ×$$

یعنی سن فرد موردنظر با فشار خون ۱۲۴ mmHg، برابر ۲۷/۵ است.

۴۲۶. گزینه ۴

$$x^2 + bx = -c \Rightarrow x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 - c$$

$$x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 2 \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} + 2$$

$$\Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} + 2$$

این معادله را با معادله‌ی $(x+a)^2 = b + 2$ مقایسه می‌کنیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{6+9}{4}$$

$$= \frac{15}{4} = \frac{16-1}{4} = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = 4 - 0/25 = 3/75$$

زرنگی:

$$(x+a)^2 = b + 2 \Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 - b - 2 = x^2 + 3x - 2$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه}} \begin{cases} 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ a^2 - b - 2 = -2 \Rightarrow b = a^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$a + b = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4} = 3/75$$

۴۲۷. گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که اگر $a = 0$ باشد، آن‌گاه معادله می‌شود $-3x + 4 = 0$ که فقط یک ریشه دارد. پس $a = 0$ قابل قبول نیست. اکنون فرض کنید $a \neq 0$ است.

معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta=b^2-4ac>0$، همواره دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد:

$$ax^2 - 3x + a + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(a)(a+4) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 9 - 4a^2 - 16a > 0 \xrightarrow[\text{جهت برمی‌گردد}]{\times(-1)} 4a^2 + 16a - 9 < 0$$

$$\xrightarrow{\text{حل معادله}} 4a^2 + 16a - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta\text{ برو}} \Delta = (16)^2 - 4(4)(-9) = 400$$

$$\Rightarrow a = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{2(4)} = \frac{-16 \pm 20}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \text{یا} \\ a = \frac{-36}{8} = \frac{-9}{2} \end{cases}$$

سپس جدول:

a	$-\infty$		$\frac{-9}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4a^2+16a-9$		+	0	−	0	+	

$$\xrightarrow[\text{منفی بشه جوابه}]{\text{جاهایی که عبارت }4a^2+16a-9} \frac{-9}{2} < a < \frac{1}{2}$$

چون $a = 0$ قابل قبول نیست، پس مجموعه‌ی مقادیر a می‌شود: $(-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}) - \{0\}$

زرنگی:

$$a = 1 \xrightarrow{\text{در معادله}} x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(1)(5) = -11 < 0$$

پس گزینه‌هایی که $a = 1$ را قبول دارند غلط هستند! گزینه‌های «۳» و «۴» حذف شدن.

$$a = -3 \xrightarrow{\text{در معادله}} -3x^2 - 3x + 1 = 0$$

$\xrightarrow{ac<0}$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد $\Rightarrow$ حذف گزینه‌ی «۲»

۴۲۸. گزینه ۲ اگر سن فعلی معلم را x سال فرض کنیم، سن او بعد از ۴ سال برابر $x+4$ و مربع سن ایشان در ۲۶ سال قبل برابر $(x-26)^2$ خواهد بود. حالا بنا به گفته‌ی معلم سعید داریم:

$$(x-26)^2 = x + 4 \xrightarrow{\text{اتحاد رو باز کن}} x^2 - 52x + 676 = x + 4$$

$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} x^۲-۵۳x+۶۷۲=۰$
$(a=۱,b=-۵۳,c=۶۷۲)$

$\xrightarrow[(\Delta=(-۵۳)^۲-۴(۱)(۶۷۲)=۱۲۱)]{\text{از }\Delta\text{ برو}} x=\frac{۵۳\pm\sqrt{۱۲۱}}{۲}=\frac{۵۳\pm۱۱}{۲}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۵۳+۱۱}{۲}=\frac{۶۴}{۲}=۳۲ \ ✓\\ \text{یا}\\ x=\frac{۵۳-۱۱}{۲}=\frac{۴۲}{۲}=۲۱ \ ✗\end{cases}$$

علت مورد قبول نبودن سن $x=۲۱$ سال برای معلم رو حتماً می‌دونی دیگه؟! آره دیگه. اگه معلم ۲۱ سالش باشه، اون‌وقت چطور ۲۶ سال قبل...

۴۳۹. گزینه ۱ اگر عدد ۱۵ را به‌صورت مجموع دو عدد x و $۱۵-x$ بنویسیم، داریم:

$x(۱۵-x)=۵۲/۲۵ \Rightarrow ۱۵x-x^۲=۵۲/۲۵ \xrightarrow{\text{مرتب کن}}$

$\Rightarrow x^۲-۱۵x+۵۲/۲۵=۰ \xrightarrow{\text{حل از تجزیه}} (x-۹/۵)(x-۵/۵)=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۹/۵=۰\\ \text{یا}\\ x-۵/۵=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۹/۵\\ \text{یا}\\ x=۵/۵\end{cases}\Rightarrow \text{اختلاف دو عدد}=۹/۵-۵/۵=۴$$

۴۴۰. گزینه ۲ در درسنامه دیدیم که برای سهمی به معادله‌ی $y=ax^۲+bx+c$ اگر نقطه‌ی S رأس آن باشد، آن‌گاه $x_S=\frac{-b}{۲a}$ و $y_S=\frac{-\Delta}{۴a}$؛ یعنی: $S(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$

در اینجا:

$$y=\frac{x^۲}{۲}-\frac{x}{۴}+۱ \underset{(a=\frac{۱}{۲},b=\frac{-۱}{۴},c=۱)}{\Rightarrow}\begin{cases}x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{\frac{۱}{۴}}{۲(\frac{۱}{۲})}=\frac{۱}{۴}\\ \text{و}\\ y_S=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{-\frac{۳۱}{۱۶}}{۴(\frac{۱}{۲})}=\frac{\frac{۳۱}{۱۶}}{۲}=\frac{۳۱}{۳۲}\end{cases}\Rightarrow S(\frac{۱}{۴},\frac{۳۱}{۳۲})$$

$(\Delta=(\frac{-۱}{۴})^۲-۴(\frac{۱}{۲})(۱)=\frac{۱}{۱۶}-۲=\frac{-۳۱}{۱۶})$

۴۴۱. گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی سهمی را به شکل استاندارد $y=۳x^۲-۲mx+۱$ نوشته، سپس مؤلفه یا مختص طول رأس S را از دستور $x_S=\frac{-b}{۲a}$ به‌دست آورده و برابر ۱− قرار می‌دهیم:

$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-(-۲m)}{۲(۳)}=\frac{m}{۳}=-۱ \Rightarrow m=-۳$

۴۴۲. گزینه ۱

$y=\underbrace{(m-۲)}_{a}x^۲\underbrace{-(۴m-۲)}_{b}x+\underbrace{۳۰}_{c}\xrightarrow{\text{طول رأس رو پیدا کن}}$

$x=-\frac{b}{۲a}\Rightarrow x=-\frac{-(۴m-۲)}{۲(m-۲)}=\underset{\text{فرض تست}}{\boxed{۳}}$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} ۴m-۲=۶m-۱۲ \xrightarrow{\text{حل معادله}} ۲m=۱۰$

$\Rightarrow m=۵ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری کن}} y=۳x^۲-۱۸x+۳۰$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

«گزینه‌ی ۱»: $\Delta=(-۱۸)^۲-۴(۳)(۳۰)=۳۲۴-۳۶۰=-۳۶$

✓ محور xها را قطع نمی‌کند. $\xrightarrow{\Delta<۰}$

✗ «گزینه‌ی ۲»: $a=۳>۰ \Rightarrow$ دهانه‌ی سهمی رو به بالاست.

«گزینه‌ی ۳»: $x=۳ \xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی}} y=۳(۳)^۲-۱۸(۳)+۳۰=۳$

$\Rightarrow$ عرض رأس $=۳ \Rightarrow$ دهانه‌ی سهمی رو به بالاست. $\Rightarrow$

✗ کمترین مقدار سهمی ۳ است. $\Rightarrow$

«گزینه‌ی ۴»: $x=۲ \xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی}} y=۳(۲)^۲-۱۸(۲)+۳۰$

✗ سهمی از نقطه‌ی $(۲,۶)$ می‌گذرد، نه نقطه‌ی $(۲,۵)$ $\Leftarrow y=۶ \xleftarrow{\text{ساده کن}}$

۴۴۳. گزینه ۱ در «گزینه‌ی ۱» با این‌که مختصات رأس سهمی به‌درستی بیان شده، یک ایراد اساسی وجود دارد و آن این است که علی‌رغم منفی بودن ضریب $x^۲$ در سهمی به معادله‌ی $y=-(x+۱)^۲-۳$، دهانه‌ی سهمی رو به بالا است (درصورتی که باید رو به پایین باز می‌شد)؛ یادمان هست که در سهمی به معادله‌ی $y=a(x-h)^۲+k$، مختصات رأس سهمی به‌صورت $S(h,k)$ است. در سایر گزینه‌ها، هم مختصات رأس سهمی و هم دهانه‌ی سهمی (با توجه به علامت a) به‌درستی بیان و رسم شده است.

همان‌طور که می‌دانید در سهمی‌هایی به فرم کلی $y=ax^۲+c$ (که فاقد x هستن) رأس سهمی به‌مختصات $S(۰,c)$، روی محور yها قرار دارد. («گزینه‌ی ۲» این‌گونه است!)

و در سهمی‌هایی به فرم کلی $y=ax^۲+bx+c$، طول رأس S از دستور $x_S=\frac{-b}{۲a}$ و عرض S با قرار دادن $x_S=\frac{-b}{۲a}$ به جای x در معادله‌ی سهمی یا به‌دست آوردن $\frac{-\Delta}{۴a}$ حاصل می‌شود. («گزینه‌های ۳» و «۴» از این دسته‌اند!)

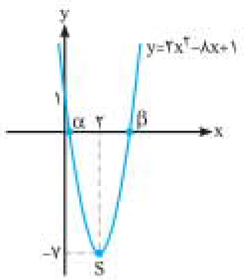
۴۴۴. گزینه ۲ درباره‌ی سهمی به معادله‌ی $y=۲x^۲-۸x+۱$ داریم:

$$\begin{cases}x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۸}{۲(۲)}=۲\\ y_S=y(۲)=۲(۲)^۲-۸(۲)+۱=-۷\end{cases}\Rightarrow S(۲,-۷)$$

$$\begin{cases}a=۲>۰ \Rightarrow \text{دهانه‌ی سهمی رو به بالا باز می‌شه.}\\ y(۰)=۱ \Rightarrow \text{(۰ و ۱) محل تلاقی نمودار با محور yها}\end{cases}$$

با همین مشخصات روشن است که سهمی هرگز وارد ناحیه‌ی سوم نمی‌شود.

ببین:



۴۴۵. گزینه ۳ شرط این‌که سهمی بالای محور xها و مماس بر آن قرار گیرد، این است که: $a>۰,\Delta=۰$

$$\begin{cases}m-۲>۰ \Rightarrow m>۲ \quad (۱)\\ \text{و}\\ \Delta=(-۳)^۲-۴(m-۲)(m+۲)=۰\Rightarrow ۹-۴m^۲+۱۶=۰\\ \Rightarrow ۴m^۲=۲۵ \Rightarrow m^۲=\frac{۲۵}{۴}\\ \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} m=\pm\frac{۵}{۲} \quad (۲)\end{cases}$$

$\Rightarrow$ مورد قبول $m=(۱)\cap(۲)=\frac{۵}{۲}$

۴۴۶. گزینه ۲ از شکل پیداست که سهمی به معادله‌ی $y=ax^۲+۸x+c$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور xها مماس است؛ بنابراین:

$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{۲a}=۲ \Rightarrow ۴a=-۸ \xrightarrow{\div۴} a=-۲$

$\Delta=b^۲-۴ac=۰\Rightarrow(۸)^۲-۴(-۲)(c)=۰\Rightarrow ۶۴+۸c=۰$

$\Rightarrow ۸c=-۶۴ \xrightarrow{\div۸} c=-۸$

زرنگی: به دلیل مماس بودن نمودار تابع $f(x)=ax^۲+۸x+c$ بر محور xها در نقطه‌ای به طول $x_S=۲$، می‌توانیم ضابطه‌ی آن را به‌صورت $f(x)=a(x-۲)^۲$ بیان کنیم: بنابراین:

$$f(x)=ax^2+8x+c=a(x-2)^2=a(x^2-4x+4)$$

$$\Rightarrow ax^2+8x+c=ax^2-4ax+4a$$

$$\xrightarrow{\text{دوطرف رو متحد قرار بده}}\begin{cases}8=-4a \Rightarrow a=-2\\ \text{و}\\ c=4a \longrightarrow c=-8\end{cases}$$

۴۴۷. **گزینه ۲** این‌بار به جای این‌که مقدار تابع را به ازای $x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-20}{2a}=\frac{-10}{a}$ حساب کنیم و برابر ۱۸۰ قرار دهیم، از همان ابتدا مستقیماً از رابطه‌ی $y_{max}=\frac{-\Delta}{4a}=180$ استفاده می‌کنیم (چرا؟):

$$\frac{-(400+480a)}{4a}=180 \Rightarrow -400-480a=720a$$

$$\Rightarrow -400=1200a \Rightarrow a=\frac{-1}{3}$$

۴۴۸. **گزینه ۱** عبارت درجه‌ی دوم ax^2+bx+c با شرط $\Delta<0$ و $a>0$ همواره مثبت و با شرط $\Delta<0$ و $a<0$ همواره منفی است.

$$\underset{(a=1,b=3,c=k)}{A=x^2+3x+k}$$

$$\xrightarrow[(A>0)]{\text{همواره مثبت}}\begin{cases}a=1>0 ✓ \ (\text{این شرط بدیهیه!})\\ \text{و}\\ \Delta=(3)^2-4(1)(k)<0 \Rightarrow 9-4k<0\\ \xrightarrow{+4k} 9<4k \xrightarrow{\div 4} k>\frac{9}{4} ✓\end{cases}$$

اشتراک $a=1>0$ و $k>\frac{9}{4}$، همان $k>\frac{9}{4}$ است.

زرنگی: A همواره مثبت است، پس به ازای $x=0$ هم مثبت است:

$$0+0+k>0 \Rightarrow k>0$$

فقط گزینه‌ی «۱» این شرط را دارد.

۴۴۹. **گزینه ۳** برای تعیین وضعیت علامت عبارت درجه‌ی دوم، علامت ضریب x^2 و دلتای $(\Delta=b^2-4ac)$ عبارت را بررسی می‌کنیم:

$$A=-3x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$$(a=-3\,,\,b=\sqrt{2}\,,\,c=\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-3<0 \ (\text{ضریب } x^2 \text{ منفیه})\\ \text{و}\\ \Delta=(\sqrt{2})^2-4(-3)(\sqrt{2}-\sqrt{3})=2+12\sqrt{2}-12\sqrt{3}<0\end{cases}$$

بنابراین در عبارت داده‌شده، $a<0$ و $\Delta<0$ بوده و در نتیجه عبارت همواره منفی است.
حالا به نظر شما، درباره‌ی وجود یا عدم وجود ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $-3x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}-\sqrt{3}=0$ چه می‌توان گفت؟!

۴۵۰. **گزینه ۳** بنا به ویژگی حاصل‌ضرب صفر (اگر $AB=0$، آن‌گاه $B=0$ یا $A=0$)، معادله‌ی $y=0$ حتماً یک ریشه‌ی $x=1$ را دارد (نمودار تابع حتماً در یک نقطه به طول $x=1$ محور xها را قطع می‌کند)؛ بنابراین برای این‌که معادله ریشه‌ی دیگری نداشته باشد (و به تبع آن نمودار تابع نیز محور xها را در نقطه‌ی دیگری قطع نکند)، باید عامل درجه‌ی دوم معادله‌ی $y=0$ فاقد ریشه باشد و این هم زمانی اتفاق می‌افتد که Δ آن منفی شود یا این‌که $x=1$ ریشه‌ی مضاعف آن باشد:

$$\Delta=(-a)^2-4(1)(a)<0 \Rightarrow a^2-4a<0$$

$$\xrightarrow{\text{حل نامعادله}} a^2-4a=0 \Rightarrow a(a-4)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ \text{یا}\\ a-4=0 \Rightarrow a=4\end{cases} \xrightarrow{\text{جدول}}$$

a	$-\infty$		0		4		$+\infty$
a^2-4a		+	0	− ✓	0	+	

$x=1$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2-ax+a=0$ است. $x=1 \Rightarrow 1-a+a=0$ (غیرممکن)

$$\Rightarrow \text{مجموعه‌ی مقادیر } a=(0,4)$$

زرنگی: با تابع چاق و لاغر مواجهیم و قرار است تابع، محور xها را فقط در یک نقطه قطع کند، بنابراین باید Δ عامل درجه‌ی دوم (چاق) را منفی کنیم:

$$\Delta=(-a)^2-4(1)(a)<0 \Rightarrow a^2-4a<0 \Rightarrow 0<a<4$$

$x=1$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2-ax+a=0$ است: بنابراین:
$1-a+a=0$ (غیرممکن)

۴۵۱. **گزینه ۲** در این تست، نقاط $(-2,5)$ و $(0,5)$ با عرض‌های یکسان روی سهمی قرار دارند پس: معادله‌ی خط تقارن سهمی: $x=\frac{0-2}{2} \Rightarrow x_S=-1$

این‌جوری هم ببین: اگه نمودار یه سهمی در نقاطی به طول α و β محور طول‌ها رو قطع کرده باشه، محور تقارن سهمی (همان خط به معادله‌ی $x=x_S=\frac{-b}{2a}$) به‌صورت $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ خواهد بود. زیرا وقتی سهمی در نقاطی به طول α و β محور xها رو قطع می‌کنه، به این معناست که دو نقطه با عرض‌های صفر به‌صورت $(\alpha,0)$ و $(\beta,0)$ روی سهمی قرار دارن. گرفتید؟!

۴۵۲. **گزینه ۳** محل تلاقی سهمی با محور yها همان b است:

$$S(-1,-4)\Rightarrow\begin{cases}x_S=\frac{-b}{2a}=-1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)}=-1 \Rightarrow a=6\\ \text{و}\\ y_S=\frac{-\Delta}{4a}=-4 \Rightarrow \frac{\Delta}{4(3)}=4 \Rightarrow \Delta=48\\ \Rightarrow (6)^2-12b=48 \Rightarrow 36-12b=48\\ \Rightarrow -12b=12 \Rightarrow b=-1 \ (\text{عرض از مبدأ})\end{cases}$$

زرنگی:

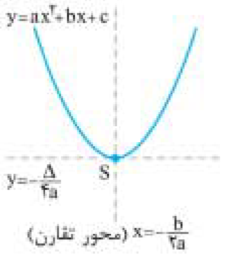
$$x_S=\frac{-b}{2a}=-1 \Rightarrow \frac{-a}{2(3)}=-1 \Rightarrow a=6 \Rightarrow y=3x^2+6x+b$$

حالا می‌گوییم رأس سهمی یکی از نقاط خود سهمی بوده و مختصاتش در معادله‌ی آن صادق است: $S(-1,-4)\in$ سهمی $(y=3x^2+6x+b)$

$$\Rightarrow -4=3(-1)^2+6(-1)+b \Rightarrow -4=-3+b \Rightarrow b=-1$$

۴۵۳. **گزینه ۳** اگر نمودار تابع را که یک سهمی است با محور تقارنش در ذهنتان تجسم کنید، متوجه می‌شوید خط افقی‌ای که با محور تقارن سهمی روی نمودار تابع تلاقی می‌کند، همان خط $y=y_S=\frac{-\Delta}{4a}$ است.

نگاه کن:



$$y=x^2-4x+c$$

$$\Rightarrow \Delta=(-4)^2-4c=16-4c$$

$$\frac{-\Delta}{4a}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{4c-16}{4}=\frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 20c-80=12$$

$$\Rightarrow 20c=92 \Rightarrow c=\frac{92}{20}=4/6$$

۴۵۴. **گزینه ۴** شکل داده‌شده یک سهمی با رأس $S(1,-2)$ را نشان می‌دهد که از نقطه‌ی $A(-1,0)$ نیز می‌گذرد. حالا باید ببینیم این دو ویژگی در معادله‌ی کدام سهمی صدق می‌کند:

گزینه‌ی «۱»: $y=x^2-x-3 \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}\neq 1$ ✗

گزینه‌ی «۲»: $y=2x^2+x-1 \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(2)}=\frac{-1}{4}\neq 1$ ✗

گزینه‌ی «۳»: $y=\frac{-1}{2}x^2+x+\frac{3}{2} \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2(\frac{-1}{2})}=1$

$$\Rightarrow y_S=\frac{-1}{2}(1)^2+1+\frac{3}{2}=2\neq -2$$ ✗

پس حتماً گزینه‌ی «۴» موردنظر است. نگاه کن:

«۴» گزینه‌ی: $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2} \Rightarrow x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2(\frac{1}{2})}=1$

$\Rightarrow y_S=\frac{1}{2}(1)^2-1-\frac{3}{2}=-2$ ✓

$A(-1,0): 0=\frac{1}{2}(-1)^2-(-1)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+1-\frac{3}{2}=0$ ✓

۴۵۵. گزینه ۲ شکل به ما می‌گوید که نمودار تابع (سهمی) از مبدأ عبور می‌کند. پس باید مختصات $O(0,0)$ در ضابطه‌ی تابع صدق کند:

$0=0+0+a^2-2 \Rightarrow a^2=2 \xrightarrow{\text{جذربگیر}} a=\pm\sqrt{2}$

$\xrightarrow{\text{ضریب } x^2 \text{ نیز } a \text{ بوده و دهانه‌ی سهمی رو به بالا است.}} a=\sqrt{2}$

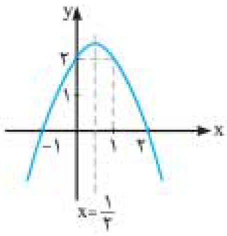
حالا به نظر شما سهمی علاوه بر مبدأ در چه نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع کرده است؟!

۴۵۶. گزینه ۴ • **روش اول** چون سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱- و ۲ قطع کرده‌است، پس می‌توان معادله‌ی آن را به‌صورت $y=a(x+1)(x-2)$ درنظر گرفت. از طرف دیگر نقطه‌ی $(0,2)$ روی سهمی است: پس:

$2=a(0+1)(0-2) \Rightarrow a=-1$

بنابراین معادله‌ی سهمی $y=-(x+1)(x-2)$ است و ...

از بین گزینه‌ها فقط نقطه‌ی $(1,2)$ روی آن قرار دارد. (سایر گزینه‌ها رو خودتون چک کنید!)



: **روش دوم** نقطه‌های $(-1,0)$ و $(2,0)$ روی سهمی هستند: پس معادله‌ی محور تقارن آن $x=\frac{1}{2}$ است.

$y(0)=2 \Rightarrow y(1)=2$

۴۵۷. گزینه ۱

$f(x)=ax^2+bx+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(-2,5)\in f \Rightarrow a(-2)^2+b(-2)+c=5 \\ B(0,5)\in f \Rightarrow a\times 0+b\times 0+c=5 \Rightarrow c=5 \\ C(1,11)\in f \Rightarrow a+b+c=11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a-2b+5=5 \\ a+b+5=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2a \\ a+b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)=2x^2+4x+5 \Rightarrow f(-1)=2-4+5=3$

پس این سهمی از نقطه‌ی $(-1,3)$ می‌گذرد.

۴۵۸. گزینه ۱ ابتدا ضابطه‌ی تابع داده‌شده را با بازکردن اتحادها ساده می‌کنیم تا به فرمی شناخته‌شده برسیم:

$f(x)=x^2-(x-1)^2+(x+2)^2+m$

$=x^2-(x^2-2x+1)+(x^2+4x+4)+m$

$=x^2-x^2+2x-1+x^2+4x+4+m \Rightarrow f(x)=x^2+6x+3+m$

حال به‌خوبی می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y=x^2+6x+3+m$ به دلیل $a=1>0$ دارای کمترین مقدار بوده و این کمترین مقدار به ازای $x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2}=-3$ رخ می‌دهد:

$y_{min}=y(-3)=(-3)^2+6(-3)+3+m=9-18+3+m$

$=-6+m=7 \Rightarrow m=13$

(البته از دستور $y_{min}=y_S=\frac{-\Delta}{4a}$ هم می‌تونستیم بریم که احتمالاً طولانی‌تر بود!)

۴۵۹. گزینه ۲ همواره بالای محور xها بودن نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ به معنای همواره مثبت بودن عبارت درجه‌ی دوم بوده و شرطش این است که $a>0$ و $\Delta<0$ باشد: پس:

$$\begin{cases} 1-a>0 \xrightarrow{+a} a<1 \quad (1) \\ \text{و} \\ \Delta<0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2-4(1-a)(-a)<0 \\ \xrightarrow{\text{ساده کن}} 24+4a-4a^2<0 \xrightarrow{\div 4} 6+a-a^2<0 \\ \xrightarrow{\text{همه رو ببر سمت راست}} a^2-a-6>0 \\ \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} a^2-a-6=0 \\ \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (a-3)(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ \text{یا} \\ a=-2 \end{cases} \end{cases}$$

جدول ←

a	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
a^2-a-6		+	0	−	0	+	
		✓				✓	

$\xrightarrow[a^2-a-6>0]{\text{ما می‌خواهیم که}} a<-2$ یا $a>3$ (2)

$\xrightarrow{\text{در نهایت}}$ مقادیر قابل قبول a = (1) $\cap$ (2) $= a<-2$

زرنگی: باید $1-a>0$ باشد: پس $a<1$ و بنابراین گزینه‌ی «۳» حذف می‌شود.
از طرفی به ازای $a=0$ ضابطه‌ی تابع برابر است با: $y=x^2+2\sqrt{6}x$
که نمودار تابع در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند: بنابراین گزینه‌های «۱» و «۴» حذف می‌شوند.

۴۶۰. گزینه ۴ حل تست را با باز کردن اتحادها (به منظور تبدیل معادله‌ی سهمی به فرم شناخته‌شده‌ی $y=ax^2+bx+c$) آغاز می‌کنیم:

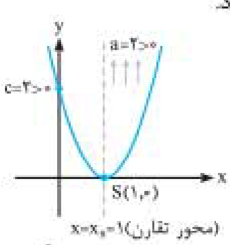
$y=(x+2)^2+(x-4)^2-18=x^2+4x+4+x^2-8x+16-18$

$\Rightarrow y=2x^2-4x+2$

$$\xrightarrow{\text{حالا مختصات رأس رو حساب کن}} \begin{cases} x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2(2)}=1 \\ y_S=y(1)=2(1)^2-4(1)+2=0 \end{cases}$$

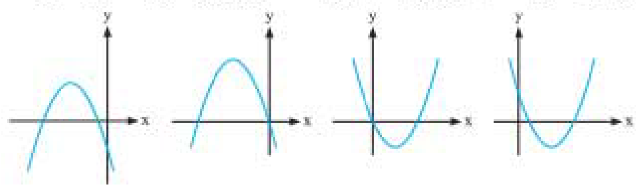
$\Rightarrow S(1,0) \Rightarrow$ نقطه‌ای روی قسمت مثبت محور xهاست.

سهمی به معادله‌ی $y=2x^2-4x+2$ به دلیل مثبت بودن ضریب x^2 $(a=2>0)$ رو به بالا باز شده: بنابراین نقطه‌ی $S(1,0)$ به منزله‌ی پایین‌ترین نقطه‌ی سهمی (یا همان مینیمم سهمی) خواهد بود.



زرنگی: در سهمی به معادله‌ی $y=2x^2-4x+2$ چون $a=2>0$، حداقل مقدار تابع به ازای $x=x_S=\frac{-b}{2a}=1$ اتفاق افتاده و برابر $y_{min}=y_S=y(1)=\frac{-\Delta}{4a}=0$ است.

۴۶۱. گزینه ۲ مطابق شکل‌های زیر برای این‌که نمودار تابع درجه‌ی دوم، دقیقاً از سه ناحیه‌ی مختصاتی عبور کند، باید دو ریشه‌ی هم‌علامت داشته باشد یا یکی از ریشه‌های آن برابر صفر باشد؛ بنابراین باید ضرب ریشه‌های آن، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.



$$\begin{cases}\Delta>0 \Rightarrow (m+4)^2-4m(2-m)>0 \\ \quad\Rightarrow m^2+8m+16-8m+4m^2>0 \\ \quad\Rightarrow 5m^2+16>0 \text{ همواره درست است} \\ P\ge 0 \Rightarrow \frac{2-m}{m}\ge 0 \Rightarrow 0<m\le 2\end{cases}$$

زرنگی: $m=3 \xrightarrow{\text{در معادله}} y=3x^2+7x-1$
$\xrightarrow{ac<0}$ از هر چهار ناحیه می‌گذرد

هر گزینه‌ای که $m=3$ را قبول دارد حذف می‌شود: یعنی همه‌ی گزینه‌ها به‌جز ۲!

۴۶۲. (گزینه ۴) وقتی خطی یک سهمی را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، یعنی محور تقارن آن است: $y=(m-2)x^2-3x+m^2+1$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی محور تقارن}} x=x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{3}{2(m-2)}=\frac{2}{3}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$4(m-2)=9\xrightarrow{\div 4} m-2=\frac{9}{4}\xrightarrow{+2} m=\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}$$

از معادله‌ی سهمی $y=(m-2)x^2-3x+m^2+1$ پیداست که محل تلاقی سهمی با محور y ها، $c=m^2+1$ است: $c=m^2+1=(\frac{17}{4})^2+1=\frac{289}{16}+1=\frac{305}{16}$

۴۶۳. (گزینه ۲) مختصات رأس سهمی را به‌دست آورده و در معادله‌ی خط $y=-x$ صدق می‌دهیم:

$$y=-2x^2+bx-3 \xrightarrow{\text{طول S}} x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-b}{2(-2)}=\frac{b}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله‌ی سهمی قرار بده}} y_S=y(\frac{b}{4})=-2(\frac{b}{4})^2+b(\frac{b}{4})-3$$

$$=-2\times\frac{b^2}{16}+\frac{b^2}{4}-3=-\frac{b^2}{8}+\frac{b^2}{4}-3=\frac{b^2}{8}-3$$

حالا باید رابطه‌ی $y=-x$ یا $y+x=0$ را با مختصات $S(\frac{b}{4},\frac{b^2}{8}-3)$ برقرار کنیم:

$$\frac{b^2}{8}-3+\frac{b}{4}=0 \xrightarrow{\times 8} b^2+2b-24=0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (b+6)(b-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} b+6=0 \\ \text{یا} \\ b-4=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} b=-6\xrightarrow{\text{در این صورت}} S(\frac{b}{4},\frac{b^2}{8}-3)=(\frac{-6}{4},\frac{36}{8}-3)=(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}) \checkmark \\ \text{یا} \\ b=4\xrightarrow{\text{در این صورت}} S(\frac{b}{4},\frac{b^2}{8}-3)=(\frac{4}{4},\frac{16}{8}-3)=(1,-1) \times \end{cases}$$

به نظر شما علت قبولی $b=-6$ و رد $b=4$ در این تست چیه؟! بله علت، قرار گرفتن رأس سهمی روی نیمساز ناحیه‌ی دوم (نه چهارم) است. درست است که هر نقطه روی خط $y=-x$ دارای طول و عرض قرینه است؛ اما نقاط روی این خط اگر در ناحیه‌ی دوم باشند، دارای طول منفی و عرض مثبت و اگر در ناحیه‌ی چهارم باشند، دارای طول مثبت و عرض منفی‌اند. طبق فرض سؤال، نقطه‌ی S روی $y=-x$ در ناحیه‌ی دوم قرار دارد، پس باید $x_S<0$ و $y_S>0$ باشد و از دو مقدار به‌دست‌آمده برای b فقط $b=-6$ این حالت را ایجاب می‌کند؛ بنابراین گزینه‌هایی که شامل $b=4$ هستند، رد می‌شوند.

۴۶۴. (گزینه ۴)

راهبرد: در سهمی‌هایی به معادله‌ی $y=a(x-h)^2+k$، ریشه‌ی پرانتز (یعنی $x=h$) همان محور تقارن سهمی است و سهمی در نقطه‌ای به عرض $y=ah^2+k$ محور y ها را قطع می‌کند.

در این سؤال با توجه به سهمی، خط $x=2$ محور تقارن آن بوده و $y(0)=-1$ است، بنابراین: $y=-2(x+3m-5)^2+m+2n$

$$\begin{cases} \text{ریشه‌ی پرانتز} = x+3m-5=0 \Rightarrow x=-3m+5=2 \Rightarrow m=1 \\ y(0)=-2(-2)^2+1+2n=-1 \Rightarrow -8+1+2n=-1 \\ \quad\Rightarrow 2n=6 \Rightarrow n=3\end{cases}$$

حال با توجه به مقادیر m و n داریم:

$$y=mx^2+nx+1=x^2+3x+1$$

$$\begin{cases} x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-3}{2(1)}=\frac{-3}{2} \\ y_S=y(\frac{-3}{2})=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+1=\frac{-9}{4}+1=\frac{-5}{4}\end{cases} \Rightarrow S(\frac{-3}{2},\frac{-5}{4})$$

۴۶۵. (گزینه ۳) می‌دانیم که سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ با شرط $\Delta=0$ و $x_S=\frac{-b}{2a}>0$ در نقطه‌ای به طول مثبت و با شرط $\Delta=0$ و $x_S=\frac{-b}{2a}<0$ در نقطه‌ای به طول منفی بر محور طول‌ها مماس می‌شود.
همچنین این سهمی با شرط $\Delta<0$ و $a<0$ همواره پایین‌تر از محور طول‌ها و با شرط $\Delta<0$ و $a>0$ همواره بالاتر از محور طول‌ها قرار می‌گیرد. (شاید دیگه نیازی به گفتن نباشه که با شرط $\Delta>0$ سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کرده و از اون عبور می‌کنه.) حال باید ببینیم سهمی داده‌شده کدام شرط را دارد:

$$\Delta=b^2-4ac=(-(2m^2+1))^2-4(1)(m^4+m^2+\frac{1}{4})$$

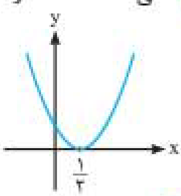
$$=4m^4+4m^2+1-4m^4-4m^2-1=0$$

$$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{2m^2+1}{2}>0$$

می‌بینیم که شرط $\Delta=0$ و $x_S>0$ برقرار بوده و گزینه‌ی «۳» درست است.

زرنگی: کافی است $m=0$ را امتحان کنیم.

$$y=x^2-x+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2 \xrightarrow{\text{شکل}}$$



۴۶۶. (گزینه ۲) ضابطه‌ی سهمی با رأس (m,h) عبارت است از:

$$y=a(x-m)^2+h$$

در نتیجه ضابطه‌ی سهمی مورد سؤال $y=a(x+1)^2+9$ است.
چون سهمی از نقطه‌ی $(3,1)$ عبور می‌کند، پس این نقطه در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند، پس داریم:

$$1=a(3+1)^2+9 \Rightarrow -8=16a \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

ضابطه‌ی سهمی $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+9$ و نقطه‌ی $(5,-9)$ در آن صدق می‌کند.

۴۶۷. (گزینه ۱) رأس سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ زمانی روی محور y ها واقع می‌شود که $b=0$ باشد (زیرا وقتی $x_S=\frac{-b}{2a}=0$ می‌شود که $b=0$ شده باشد)، پس:

$$y=-3x^2+(2m-1)x+5 \xrightarrow{b=0} 2m-1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y=-3x^2+5$$

حالا باید سهمی به معادله‌ی $y=-3x^2+5$ را با خط به معادله‌ی $y-2=0$ یا همان $y=2$ تلاقی دهیم:

$$\begin{cases} y=-3x^2+5 \\ y=2\end{cases} \Rightarrow -3x^2+5=2 \Rightarrow -3x^2=-3$$

$$\xrightarrow{\div(-3)} x^2=1 \xrightarrow{\text{جذر بگیر}} x=\pm 1$$

۴۶۸. گزینه ۳ برای محاسبه‌ی مساحت مثلث موردنظر، ابتدا باید قاعده و سپس ارتفاع آن را به‌دست آوریم. قاعده همان فاصله‌ی بین دو ریشه و ارتفاع هم قدرمطلق عرض رأس سهمی است. مجموع ضرایب معادله‌ی $x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر صفر است، پس ریشه‌های آن عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = m-1 \end{cases} \Rightarrow \text{قاعده‌ی مثلث} = |x_2 - x_1| = |m-2|$$

$$\text{عرض رأس سهمی} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-m)^2 - 4(m-1)}{4\times 1}$$

$$= -\frac{m^2-4m+4}{4} = \frac{(m-2)^2}{-4}$$

$$\text{ارتفاع} = \left|\frac{(m-2)^2}{-4}\right| = \frac{(m-2)^2}{4}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\times\frac{(m-2)^2}{4}\times|m-2| = \frac{|m-2|^3}{8} = 1 \Rightarrow |m-2|^3 = 8$$

$$\Rightarrow |m-2| = 2 \Rightarrow m-2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} m=0\\ m=4\end{cases} \xrightarrow{m>0} m=4$$

۴۶۹. گزینه ۴ تست تلاش می‌کند بگوید تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 - x + \frac{2}{3}$ حداقل مقداری برابر $y_{min} = \frac{1}{2}$ دارد؛ زیرا $y \ge \frac{1}{2}$ به معنای $y_{min} = \frac{1}{2}$ است. بنابراین اولاً باید $a>0$ باشد تا تابع بتواند دارای حداقل مقدار شود (حذف گزینه‌های «۱» و «۲»)، ثانیاً باید این مقدارِ حداقل (یعنی $\frac{1}{2}$) برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ باشد:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(a)(\frac{2}{3}) = 1 - \frac{8}{3}a$$

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{8}{3}a - 1}{4a} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین کن}} \frac{16}{3}a - 2 = 4a$$

$$\Rightarrow \frac{16}{3}a - 4a = 2 \Rightarrow \frac{4}{3}a = 2 \xrightarrow{\times\frac{3}{4}} a = 2\times\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

۴۷۰. گزینه ۴ نقطه‌ی مشترک نداشتن بین سهمی و خط به معنای عدم وجود ریشه در معادله‌ی تلاقی آن دو است:

$$\begin{cases} y=(2x+1)(x+8)\\ y=mx\end{cases} \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} (2x+1)(x+8)=mx$$

$$\xrightarrow[\text{مرتب کن}]{\text{ساده و}} 2x^2+17x+8-mx=0 \Rightarrow 2x^2+(17-m)x+8=0$$

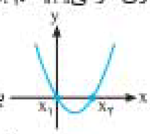
$$\xrightarrow[\text{معادله رو منفی کنیم}]{\text{حالا باید } \Delta \text{ این}} \Delta = (17-m)^2 - 4(2)(8) < 0$$

$$\Rightarrow (17-m)^2 - 64 < 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} (17-m)^2 < 64$$

$$\xrightarrow{\text{جذر بگیر}} |17-m| < 8 \Rightarrow -8 < 17-m < 8$$

$$\xrightarrow{-17} -25 < -m < -9 \xrightarrow{\times(-1)} 9 < m < 25$$

۴۷۱. گزینه ۲ معادله‌ی $ax^2 - (a+2)x = 0$ دو ریشه به‌صورت $x_1 = 0$ و $x_2 = \frac{a+2}{a}$ دارد. حال با اندکی تجسم نموداری درمی‌یابیم برای این‌که سهمی نتواند وارد ناحیه‌ی سوم شود، باید به شکل

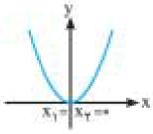


باشد. یعنی اولاً دهانه‌ی سهمی باید رو به بالا باشد ($a>0$)، ثانیاً ریشه‌ی $x_2 = \frac{a+2}{a}$ معادله‌ی مربوطه مثبت باشد:

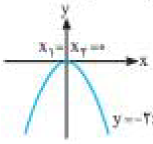
$$x_2 = \frac{a+2}{a} > 0 \xrightarrow[\text{است } a>0]{\text{با توجه به این‌که}} a+2>0 \Rightarrow a>-2$$

$\xrightarrow[a>0]{\text{با اعمال شرط}}$ حدود a: $a>0$

کمی اضافه‌تر: اگر می‌خواهید بدانید چرا حالت

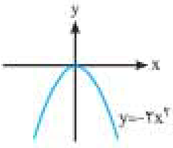


را که در آن نیز سهمی وارد ناحیه‌ی سوم نشده است، در نظر نگرفتیم، باید بگوییم که این حالت برای سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a+2)x$ غیرممکن است؛ زیرا این حالت زمانی رخ می‌دهد که $x_2 = \frac{a+2}{2} = 0$ شود و آن نیز به معنای $a = -2$ بوده و در این‌حالت ضریب x^2 منفی شده و سهمی به شکل



تبدیل می‌شود.

زرنگی: فرض کنید $a = -2$ باشد؛ بنابراین:



با توجه به شکل، گزینه‌های «۱»، «۳» و «۴» حذف می‌شود.

۴۷۲. گزینه ۴ مختصات رأس نمودار تابع در ضابطه‌ی آن صدق می‌کند؛ بنابراین:

$$f(x)=x^2+2x-c \xrightarrow{f(-1)=3} 3=(-1)^2+2(-1)-c$$

$$\Rightarrow 3=-1-c \Rightarrow c=-4$$

حالا باید با توجه به ضابطه‌ی تابع $f(x)=x^2+2x+4$، ضابطه‌ی تابع $y=f(2x-1)$ را (با جایگزین کردن $(2x-1)$ به جای xها) به‌دست آورده و بعد مختصات رأس نمودار آن را به‌دست آوریم:

$$y=f(2x-1)=(2x-1)^2+2(2x-1)+4$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 4x^2-4x+1+4x-2+4 \Rightarrow y=4x^2+3$$

$$\Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(4)} = 0,\ y_S = y(0) = 4(0)^2+3 = 3 \Rightarrow S(0,3)$$

زرنگی: می‌توانیم به کمک انتقال نمودارها هم، سؤال را حل کنیم؛ ببینید:

$$S(-1,3) \xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{x\to x-1} S_1(0,3) \xrightarrow[\text{طول‌ها بر ۲ تقسیم می‌شوند}]{x\to 2x} S_2(0,3)$$

پس مختصات رأس سهمی تابع $f(2x-1)$ به‌صورت $(0,3)$ خواهد بود.

۴۷۳. گزینه ۲ همه‌ی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

با کمی دقت به شکل متوجه می‌شویم که:

الف) سهمی رو به بالاست، پس $a>0$ است.

ب) سهمی محور yها را زیر محور xها قطع کرده است، پس $c<0$ است.

پ) طول رأس سهمی منفی است، پس: $\frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a>0} b>0$

در نتیجه داریم:

$a>0, b>0, c<0 \Rightarrow abc<0 \Rightarrow$ گزینه‌ی «۱» حذف می‌شود.

از روی نمودار تابع، کاملاً مشخص است که تابع f دارای دو صفر مختلف‌العلامت است که قدرمطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر است؛ پس:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta<0\\ P=\alpha\beta<0\end{cases} \Rightarrow \alpha^3+\beta^3 = S^3-3PS<0$$

$\Rightarrow$ گزینه‌ی «۲» درست است.

تابع f دارای دو صفر است. $\Rightarrow \Delta>0 \Rightarrow b^2-4ac>0 \Rightarrow b^2>4ac$

$\Rightarrow \frac{b^2}{4} > ac \Rightarrow$ گزینه‌ی «۳» حذف می‌شود.

می‌دانیم که رأس سهمی، در وسط صفرهای تابع قرار دارد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} x_s = \frac{\alpha+\beta}{2}\\ y_s=\frac{-\Delta}{4a}\end{cases} \Rightarrow f(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow$$ گزینه‌ی «۴» حذف می‌شود.

۴۷۴. (گزینه ۲) $\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=\frac{x_۱+x_۲}{x_۱x_۲}=\frac{S}{P}\quad \circledast$

برای معادله‌ی $۲x^۲-۹x-۱=۰$ داریم:

$$\begin{cases} S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=\frac{۹}{۲} \\ P=x_۱x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{در } \circledast} \frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}=\frac{\frac{۹}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=-۹$$

۴۷۵. (گزینه ۴) در معادله‌ی داده‌شده داریم:

$$۳x^۲-۴x-۲=۰ \xrightarrow[c=-۲]{a=۳,b=-۴} \begin{cases} S=x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=\frac{۴}{۳} \\ P=x_۱x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته‌ی تست}} x_۱^۲+x_۲^۲=S^۲-۲P=\frac{۱۶}{۹}-۲(-\frac{۲}{۳})$$

$$=\frac{۱۶}{۹}+\frac{۴}{۳}=\frac{۱۶+۱۲}{۹}=\frac{۲۸}{۹}$$

۴۷۶. (گزینه ۲) در اینجا ابتدا معادله‌ی داده‌شده را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$(۳m-۱)x^۲-۲x+(۱-m^۲)=۰$$

بنابراین:

$$S=\frac{-b}{a}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \frac{۲}{۳m-۱}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} ۳m-۱=۸$$

$$\Rightarrow m=۳ \xrightarrow{\text{در معادله بذار}} ۸x^۲-۲x-۸=۰$$

$$\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=P=\frac{c}{a}=\frac{-۸}{۸}=-۱$$

۴۷۷. (گزینه ۴) اولاً برای این‌که معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، باید $\Delta>۰$؛ یعنی:

$$\Delta=(\frac{-۱}{۴})^۲-۴(\frac{۱}{۲})(m)>۰ \Rightarrow \frac{۱}{۱۶}-۲m>۰ \xrightarrow{+۲m} ۲m<\frac{۱}{۱۶}$$

$$\Rightarrow m<\frac{۱}{۳۲}$$

ثانیاً برای این‌که حاصل‌ضرب این دو ریشه برابر ۴ باشد، باید:

$$P=\frac{c}{a}=\frac{m}{\frac{۱}{۲}}=۴ \Rightarrow ۲m=۴ \Rightarrow m=۲$$

اما می‌بینیم که این جواب در شرط $m<\frac{۱}{۳۲}$ صدق نمی‌کند؛ پس هیچ مقداری برای m نداریم.

زرنگی: ابتدا از شرط $P=\frac{c}{a}=۴$ مقدار m را ($\frac{m}{\frac{۱}{۲}}=۴ \Rightarrow m=۲$) یافته، سپس شرط وجود دو جواب حقیقی (همان $\Delta>۰$) را به ازای $m=۲$ بررسی می‌کنیم:

$$\frac{x^۲}{۲}-\frac{x}{۴}+۲=۰ \Rightarrow \Delta=\frac{۱}{۱۶}-۴<۰$$

در نتیجه معادله فاقد ریشه‌ی حقیقی است و $m=۲$ قابل قبول نیست!

۴۷۸. (گزینه ۲) طبق مطالب گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$|x'-x''|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(-۴)^۲-۴\times۱\times۱}}{|۱|}=\sqrt{۱۲}=\sqrt{۴\times۳}=۲\sqrt{۳}$$

زرنگی: با حل معادله می‌توانیم به سادگی جواب را به‌دست آوریم:

$$x^۲-۴x+۱=۰ \xrightarrow{\Delta=۱۲} x=\frac{۴\pm۲\sqrt{۳}}{۲}=۲\pm\sqrt{۳}$$

$$|x'-x''|=۲\sqrt{۳}$$

۴۷۹. (گزینه ۳) شکی نیست که جواب معادله در معادله صدق می‌کند. از اینجا مقدار m به‌دست می‌آید:

$$-۳x^۲+(m+۱)x+m=۰ \xrightarrow{x=۱} -۳+m+۱+m=۰$$

$$\Rightarrow ۲m=۲ \Rightarrow m=۱ \xrightarrow{\text{در معادله بذار}} -۳x^۲+۲x+۱=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \alpha=۱ \quad \text{و} \quad \beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{-۳}$$

زرنگی: در معادله‌ی درجه‌ی دومی که یکی از ریشه‌هایش $\alpha=۱$ است، مجموع ضرایب صفر شده و ریشه‌ی دیگر معادله $\beta=\frac{c}{a}$ است:

$$-۳x^۲+(m+۱)x+m=۰$$

$$\xrightarrow{\alpha=۱} \text{مجموع ضرایب}=-۳+m+۱+m=۰ \Rightarrow ۲m=۲$$

$$\Rightarrow m=۱ \Rightarrow \text{ریشه‌ی دیگر}=\beta=\frac{c}{a}=\frac{m}{-۳}=\frac{۱}{-۳}$$

۴۸۰. (گزینه ۱) از ویژگی «حاصل‌ضرب صفر» ($AB=۰ \Rightarrow A=۰$ یا $B=۰$) استفاده کرده و داریم:

$$(۲x+۱)(۳x^۲-۷x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۲} \quad (\text{یک ریشه}) \\ \text{یا} \\ ۳x^۲-۷x+۱=۰ \xrightarrow{\text{بدون حل}} P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳} \\ \quad (\Delta=۴۹-۱۲>۰ \Rightarrow \text{تضمین وجود دو ریشه}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب سه ریشه}=(\frac{-۱}{۲})(\frac{۱}{۳})=\frac{-۱}{۶}$$

به نظر شما مجموع ریشه‌های معادله چقدر است؟

۴۸۱. (گزینه ۴) هدف سؤال، محاسبه‌ی مقدار $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ است. اما پیش از شروع بهتر است به کمک ضرایب معادله مقادیر S و P را به‌دست آوریم:

$$۲x^۲-(m+۱)x+\frac{۱}{۸}=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{m+۱}{۲} \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۱۶} \end{cases} \quad \circledast$$

حالا: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲}=\sqrt{(\alpha+\beta)+۲\sqrt{\alpha\beta}}$

$$\overset{\circledast}{=} \sqrt{\frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}=۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲ برسون}} \frac{m+۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۴$$

$$\Rightarrow \frac{m+۱}{۲}=\frac{۷}{۲} \Rightarrow m+۱=۷ \Rightarrow m=۶$$

توجه: مطابق با مطالب درسنامه، می‌توانستیم به کمک فرمول $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$ نیز این تست را حل کنیم.

۴۸۲. (گزینه ۲)

راهبرد: هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی دو، دلتای معادله، مربع کامل باشد یا به عبارتی دارای جذر کامل باشد، لازم نیست از رابطه‌ی بین ریشه‌ها استفاده شود. در این حالت ریشه‌های معادله را حساب کرده، سپس خواسته‌ی سؤال را محاسبه کنید.

الان در چنین وضعی هستیم:

$$x^۲-x-۲=۰ \xrightarrow[\text{با شرط } \alpha<\beta]{a+c=b} \begin{cases} \alpha=-۱ \\ \beta=\frac{-c}{a}=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵\alpha^۲+۷\beta^۲=۵(-۱)^۲+۷(۲)^۲=۵+۲۸=۳۳$$

۴۸۳. (گزینه ۳) ریشه‌های معادله را α و β می‌نامیم و داریم:

$$\alpha=\beta+۲ \xrightarrow{\beta \text{ رو به طرفین اضافه کن}} \alpha+\beta=۲\beta+۲$$

$$\xrightarrow[\alpha+\beta=\frac{۸}{۲}=۴]{\text{از روی ضرایب معادله}} ۴=۲\beta+۲ \Rightarrow ۲\beta=۲ \Rightarrow \beta=۱$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله قرار بده } x=۱} ۲(۱)^۲-۸(۱)+m=۰ \Rightarrow m=۶$$

زرنگی: اگر جواب‌های معادله را $x_۱$ و $x_۲$ در نظر بگیریم، داریم:

$$|x_۱-x_۲|=۲\Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \Delta=۴a^۲$$

$$\Rightarrow ۶۴-۸m=۱۶\Rightarrow ۸m=۴۸\Rightarrow m=۶$$

۴۸۴. گزینه ۱ در این مسئله دلتای معادله جذر کامل دارد و ریشه‌ها به‌راحتی قابل محاسبه‌اند. **نگاه کنید:**

$$x^۲-۲۰x+۶۴=۰ \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (x-۱۶)(x-۴)=۰\Rightarrow \begin{cases}x_۱=۱۶\\ x_۲=۴\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}=\sqrt{۱۶}+\sqrt{۴}=۴+۲=۶$$

۴۸۵. گزینه ۴ اگر ریشه‌ها را α و β بنامیم، آن‌گاه:

$$\text{مجموع معکوس ریشه‌ها}=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}$$

$$=\frac{-(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱)}{-(\sqrt{۲}+۱)}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}+۱}\times\frac{\sqrt{۲}-۱}{\sqrt{۲}-۱}$$

$$=\frac{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}=\frac{\sqrt{۶}+۲+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}-۱}{۲-۱}$$

$$=\sqrt{۶}-\sqrt{۳}+۱$$

۴۸۶. گزینه ۱ معکوس بودن ریشه‌های معادله، یعنی $\alpha=\frac{۱}{\beta}$ یا $\alpha\beta=۱$ است. پس:

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۳-a}{a-۱}=۱ \xrightarrow[(a\neq ۱)]{\text{طرفین وسطین}} ۳-a=a-۱$$

$$\Rightarrow ۲a=۴\Rightarrow a=۲$$

به دلیل وجود گزینه‌ی «۴»، حالا باید ببینیم که به ازای $a=۲$ معادله جواب حقیقی دارد یا خیر:

$$(a-۱)x^۲+۲ax+۳-a=۰ \xrightarrow{a=۲} x^۲+۴x+۱=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۱۶-۴=۱۲>۰ ✓$$

پس معادله دارای ریشه‌ی حقیقی بوده و $a=۲$ قابل قبول است.

۴۸۷. گزینه ۳ همان‌طور که در درسنامه گفته شد، در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر یکی از ریشه‌ها λ برابر ریشه‌ی دیگر باشد، آن‌گاه رابطه‌ی $\frac{(\lambda+۱)^۲}{\lambda}=\frac{b^۲}{ac}$ بین ضرایب معادله و عدد λ برقرار است.

بنابراین با توجه به رابطه‌ی بالا برای $\lambda=۳$ داریم:

$$\frac{(-۴)^۲}{k(k+۲)}=\frac{(۳+۱)^۲}{۳}\Rightarrow \frac{۱۶}{k^۲+۲k}=\frac{۱۶}{۳}\Rightarrow k^۲+۲k=۳$$

$$\Rightarrow k^۲+۲k-۳=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} k=۱ \text{ یا } k=\frac{c}{a}=-۳$$

۴۸۸. گزینه ۴ معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$، دو ریشه‌ی مثبت دارد، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\Delta>۰\Rightarrow m^۲-۴(۲)(۹m+۶)>۰\Rightarrow m^۲-۸m-۴۸>۰ \\ \quad\Rightarrow (m-۱۲)(m+۴)>۰\Rightarrow m<-۴ \text{ یا } m>۱۲ \quad ۱\\ S>۰\Rightarrow -\frac{b}{a}>۰\Rightarrow -\frac{m}{۲}>۰\Rightarrow m<۰ \quad ۲\\ P>۰\Rightarrow \frac{c}{a}>۰\Rightarrow \frac{m+۶}{۲}>۰\Rightarrow m>-۶ \quad ۳\end{cases}$$

اشتراک سه مجموعه جواب به‌دست آمده بازه‌ی $(-۶,-۴)$ است.

۴۸۹. گزینه ۳ با توجه به ضرایب معادله، حاصل‌ضرب دو ریشه قابل محاسبه بوده و در نتیجه...

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-a}{۳a}=\frac{-۱}{۳}\Rightarrow \alpha\beta=\frac{-۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{۲}{۳}} \frac{۲}{۳}\times\beta=\frac{-۱}{۳} \xrightarrow{\times\frac{۳}{۲}} \beta=\frac{-۱}{۳}\times\frac{۳}{۲}=\frac{-۱}{۲}$$

۴۹۰. گزینه ۳ عبارت داده‌شده برحسب ریشه‌های معادله همان اتحاد مکعب دوجمله‌ای است:

$$\alpha^۳+۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳=S^۳=(\frac{-b}{a})^۳$$

$$=(-۳)^۳=-۲۷$$

۴۹۱. گزینه ۴ با توجه به ضرایب معادله، حاصل جمع ریشه‌ها قابل محاسبه است: کار را با همین شروع می‌کنیم:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-۲}{۱}\Rightarrow \alpha+\beta=-۲\Rightarrow \alpha=-\beta-۲ \quad *$$

حالا در رابطه‌ی داده‌شده به جای α قرار می‌دهیم $\alpha=-\beta-۲$:

$$\alpha^۲+۳\beta^۲+۴\alpha\beta+۴=۰\Rightarrow (-\beta-۲)^۲+۳\beta^۲+۴(-\beta-۲)\beta+۴=۰$$

$$\Rightarrow \beta^۲+۴\beta+۴+۳\beta^۲-۴\beta^۲-۸\beta+۴=۰\Rightarrow -۴\beta+۸=۰$$

$$\Rightarrow ۴\beta=۸\Rightarrow \beta=۲ \xrightarrow{*} \alpha=-۲-۲=-۴\Rightarrow \alpha\beta=-۸$$

۴۹۲. گزینه ۳ برای ریشه‌های α و β، جذر معکوس ریشه‌ها، یعنی $\sqrt{\frac{۱}{\alpha}}=\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}$ و $\sqrt{\frac{۱}{\beta}}=\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$؛ پس:

$$\text{مجموع جذر ریشه‌ها}=A=\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}$$

$$=\frac{\sqrt{S+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} \xrightarrow[S=۴,\ P=۲]{\text{با توجه به ضرایب معادله}} A=\frac{\sqrt{۴+۲\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲}}$$

$$=\sqrt{\frac{۴+۲\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{\frac{۴}{۲}+\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$$

(روابط $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}}$ و $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}$ را بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم به خاطر بسپارید!)

۴۹۳. گزینه ۲ با کمی توجه به رابطه‌ی داده‌شده و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی درجه‌ی دوم درمی‌یابیم که برقراری رابطه‌ی $c+۲b+۴a=۰$ بین ضرایب معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ به معنای این است که $x=۲$ یکی از ریشه‌های آن است؛ زیرا با جایگزین کردن $x=۲$ در معادله دقیقاً به رابطه‌ی $۴a+۲b+c=۰$ می‌رسیم. حال اگر ریشه‌ی دیگر معادله را β بنامیم و از رابطه‌ی حاصل‌ضرب ریشه‌ها $(P=\alpha\beta=\frac{c}{a})$ استفاده کنیم، داریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \xrightarrow[\beta=?]{\alpha=۲} ۲\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow \beta=\frac{c}{۲a}$$

۴۹۴. گزینه ۱

$$۳x^۲+(۲m-۱)x+۲-m=۰$$

$$\text{طبق فرض سؤال}\Rightarrow x_۱+x_۲=\frac{۱}{x_۱x_۲}\Rightarrow -\frac{b}{a}=\frac{۱}{\frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow -\frac{۲m-۱}{۳}=\frac{۳}{۲-m}\Rightarrow (۲m-۱)(m-۲)=۹$$

$$\Rightarrow ۲m^۲-۵m+۲=۹\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}m=-۱\\ m=\frac{۷}{۲}\end{cases}$$

حالا Δ را بررسی می‌کنیم:

$$\Delta=(۲m-۱)^۲-۴\times۳(۲-m) \xrightarrow{m=-۱} \Delta=۹-۳۶<۰$$

پس $m=\frac{۷}{۲}$ قابل قبول است.

۴۹۵. (گزینه ۱) در معادله‌ی درجه‌ی دوم داده‌شده ضرایب a و b معلوم بوده و با توجه به رابطه‌ی حاصل جمع ریشه‌ها داریم:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=5 \xrightarrow{\alpha=2} 2+\beta=5 \Rightarrow \beta=3$$

بنابراین $\alpha=2$ و $\beta=3$ ریشه‌های این معادله بوده و...

$$\alpha^3+\beta^3=(2)^3+(3)^3=8+27=35$$

همان‌طور که می‌بینید بدون توجه به مقدار m توانستیم سؤال رو حل کنیم!

۴۹۶. (گزینه ۳) اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آن‌گاه طبق فرض تست $\alpha=\beta^2$ بوده و با توجه به ضرایب معادله، $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=6$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=m+5$ است. ابتدا تلاش می‌کنیم به کمک روابط $\alpha+\beta=6$ و $\alpha=\beta^2$، مقدار ریشه‌ها را یافته، سپس به کمک رابطه‌ی $\alpha\beta=m+5$ مقدار m را پیدا کنیم. نگاه کن:

$$\begin{cases}\alpha=\beta^2\\ \alpha+\beta=6\end{cases} \Rightarrow \beta^2+\beta-6=0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (\beta+3)(\beta-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta+3=0\Rightarrow\beta=-3\\ \text{یا}\\ \beta-2=0\Rightarrow\beta=2\end{cases} \xrightarrow{\alpha=\beta^2} \begin{cases}\alpha=9\\ \text{یا}\\ \alpha=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha\beta=-27\\ \text{یا}\\ \alpha\beta=8\end{cases} \xrightarrow{\alpha\beta=m+5} \begin{cases}m+5=-27\Rightarrow m=-32\\ \text{یا}\\ m+5=8\Rightarrow m=3\end{cases}$$

که فقط $m=-32$ در گزینه‌ها دیده می‌شود!

۴۹۷. (گزینه ۱) فرض کنیم α و β ریشه‌های معادله باشند.
با توجه به اتحاد $(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}$، ضریب x^2 را ساده می‌کنیم و در معادله‌ی مرتب‌شده مقدار S را پیدا می‌کنیم و...

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=|\underbrace{\sqrt{3}-1}_{\text{مثبت}}|=\sqrt{3}-1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}-1)x^2+(1-\sqrt{3})x-17=0$$

$$\Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(1-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-1)}=\frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)}=1$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=1 \Rightarrow \alpha=-\beta+1 \quad (*)$$

با توجه به رابطه‌ی (*) یکی از ریشه‌ها از قرینه‌ی ریشه‌ی دیگه، ۱ واحد بیشتره!

۴۹۸. (گزینه ۱) باید معادله‌ی $f(x)=0$ دو ریشه‌ی منفی داشته باشد. این زمانی محقق می‌شود که به‌طور همزمان داشته باشیم:

$\Delta>0, P>0, S<0$

① $\Delta>0 \Rightarrow (a+3)^2-4a(-1)>0 \Rightarrow a^2+6a+9+4a>0$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{a^2+10a+9}}_{P_1}>0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت } P_1} P_1=a^2+10a+9=(a+1)(a+9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a+1=0\Rightarrow a=-1\\ a+9=0\Rightarrow a=-9\end{cases}$$

جدول:

a	$-\infty$		-9		-1		$+\infty$
P_1		+		−		+	

$\xrightarrow[P_1>0]{\text{می‌خواهیم}}$ $a<-9$ یا $a>-1$

② $P=\frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{-1}{a}>0 \xrightarrow[\text{برای مثبت شدن کسر}]{\text{صورت کسر منفیه}}$ باید: $a<0$

③ $S=\frac{-b}{a}<0 \Rightarrow \frac{-(a+3)}{a}<0 \xrightarrow{\text{قرینه کن}} \underbrace{\boxed{\frac{a+3}{a}}}_{P_2}>0$

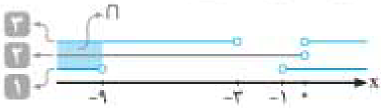
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت } P_2} \begin{cases}a+3=0\Rightarrow a=-3\\ a=0\end{cases}$$

جدول تعیین علامت:

a	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
P_2		+		−	ت ن	+	

$\xrightarrow[P_2>0]{\text{می‌خواهیم}}$ $a>0$ یا $a<-3$

$\xrightarrow{\text{درنهایت}}$ مجموعه‌ی مقادیر a = ① $\cap$ ② $\cap$ ③ $=\{a \mid a<-9\}$



زرنگی: $a=-4 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x)=-4x^2-x-1$

$\xrightarrow{\text{وجود ریشه!}} \Delta=(-1)^2-4(-4)(-1)=-15<0 \Rightarrow$ ریشه‌ندارد

$\Rightarrow$ حذف گزینه‌ی «۲»

$$a=-\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-1 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{جمع}} s=-\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=5>0$$

این یعنی هر دو ریشه منفی نبوده‌اند! گزینه‌هایی که $-\frac{1}{2}$ را قبول دارند غلط هستن! یعنی گزینه‌های «۳» و «۴» ...

۴۹۹. (گزینه ۱) با در نظر گرفتن شرط دو ریشه‌ی حقیقی و مثبت متمایز، داریم:

$\xrightarrow{\text{شرط‌ها}}$ (1) $\Delta>0$ (2) $P>0$ (3) $S>0$

$x^2+(m-2)x+m+1=0$

(1) $\Delta=b^2-4ac=(m-2)^2-4\times1\times(m+1)>0$

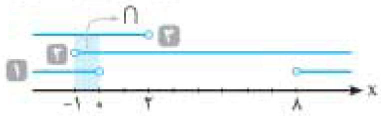
$\xrightarrow{\text{اتحاد رو باز کن}} m^2-4m+4-4m-4>0 \Rightarrow m^2-8m>0$

$\Rightarrow m<0$ یا $m>8$ ①

(2) $P=\frac{c}{a}=m+1>0\Rightarrow m>-1$ ②

(3) $S=-\frac{b}{a}=-(m-2)>0\Rightarrow -m+2>0\Rightarrow m<2$ ③

جواب نهایی = ① $\cap$ ② $\cap$ ③ $=(-1,0)$



زرنگی: با گذاشتن $m=9$، $m=7$ و $m=-2$ می‌توانید Δ را بررسی و گزینه‌های غلط را حذف کنید ...

۵۰۰. (گزینه ۳) در گزینه‌ها موقعیت نمودار تابع که یک سهمی است، نسبت به محور xها بررسی شده و می‌دانیم آنچه در این مورد اهمیت دارد، علامت Δ و علامت صفرهای تابع (نقاط تلاقی با محور طول‌ها) است؛ بنابراین:

$\Delta=b^2-4ac=(-3m)^2-4(m^2)(-1)$

$=9m^2+4m^2=13m^2 \xrightarrow{m\neq0} \Delta>0 \Rightarrow$ دو نقطه‌ی تلاقی دارد.

حاصل‌ضرب صفرهای تابع $=P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{m^2}<0$

آن دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند، پس نمودار تابع در دو طرف مبدأ، محور طول‌ها را قطع می‌کند.

۵۰۱. (گزینه ۱) اگر α و β را صفرهای تابع بنامیم، آن‌گاه با کم کردن نیم واحد از آن‌ها به اعداد $\alpha-\frac{1}{2}$ و $\beta-\frac{1}{2}$ می‌رسیم و برای حاصل‌ضرب‌شان داریم:

$$(\alpha-\frac{1}{2})(\beta-\frac{1}{2})=\alpha\beta-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{4}=\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow[(\alpha+\beta=-3)]{x^2+3x-c=0 \text{ در معادله‌ی}} \alpha\beta-\frac{1}{2}(-3)+\frac{1}{4}=\alpha\beta+\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\alpha\beta+\frac{7}{4}$$

یعنی به حاصل‌ضرب صفرهای تابع $\frac{7}{4}$ اضافه می‌شود.

زرنگی:

$c=-2 \Rightarrow f(x)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

صفرهای تابع $= -1 \quad , \quad -2$ حاصل‌ضرب $=2$

↓ نیم‌واحد کم می‌کنیم ↓ $\xrightarrow{\text{اختلاف}}$

$-\frac{3}{2} \quad -\frac{5}{2}$ حاصل‌ضرب $=\frac{15}{4}$

$\frac{15}{4}-2=\frac{7}{4}$

۵۰۲. گزینه ۳ با توجه به فرض تست، ریشه‌های معادله را $(\alpha-1)^2$ و $(\alpha+1)^2$ در نظر بگیریم. با توجه به جمع ریشه‌ها داریم:

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-290}{1}=290 \Rightarrow (\alpha-1)^2+(\alpha+1)^2=290$$

$$\Rightarrow \alpha^2-2\alpha+1+\alpha^2+2\alpha+1=290 \Rightarrow 2\alpha^2+2=290 \Rightarrow \alpha^2=144$$

$$\xrightarrow{\alpha\in N} \alpha=12$$

پس ریشه‌های معادله 11^2 و 13^2 هستند. با توجه به ضریب ریشه‌ها داریم:

$$p=\frac{c}{a} \Rightarrow m^2=11^2\times 13^2 \Rightarrow m=11\times 13=143 \Rightarrow \sqrt{m+1}=\sqrt{144}=12$$

۵۰۳. گزینه ۱ با توجه به ضرایب معادله‌ی $x^2+bx+b=0$ داریم:

$$S=\frac{-b}{a}=-b \ , \ P=\frac{c}{a}=b$$

حالا سعی می‌کنیم رابطه‌ی داده‌شده را برحسب S و P بنویسیم و...

$$\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\beta}=1 \xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک‌بگیر}} \frac{2\beta+3\alpha}{\alpha\beta}=1 \xrightarrow[\text{S رو بساز}]{\text{در صورت کسر}}$$

$$\frac{(2\beta+2\alpha)+\alpha}{\alpha\beta}=1 \Rightarrow \frac{2(\alpha+\beta)+\alpha}{\alpha\beta}=1 \xrightarrow[\alpha\beta=P=b]{\alpha+\beta=S=-b} \frac{-2b+\alpha}{b}=1$$

$$\xrightarrow[(b\neq 0)]{\times b} -2b+\alpha=b \xrightarrow{+2b} \alpha=3b \ \text{(یک ریشه‌ی معادله)}$$

$$\xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{درمعادله}} (3b)^2+b(3b)+b=0 \Rightarrow 9b^2+3b^2+b=0$$

$$\Rightarrow 12b^2+b=0 \xrightarrow{\text{فاکتوربگیر}} b(12b+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=0 \ \times \ \text{(چرا؟)} \\ \text{یا} \\ 12b+1=0 \Rightarrow b=\frac{-1}{12} \ \checkmark \end{cases}$$

۵۰۴. گزینه ۴ برای حل این تست، به جای این‌که حاصل $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$ و $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|$ را به‌طور جداگانه از روابط $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$ و $|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$ محاسبه کرده و جمع کنیم، فرض می‌کنیم α ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی $2x^2-(\sqrt{5}+2)x+\sqrt{5}=0$ باشد ($\alpha>\beta$ و در نتیجه $\sqrt{\alpha}>\sqrt{\beta}$) و داریم:

$$A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+|\underbrace{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}_{\oplus}|=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}=2\sqrt{\alpha}$$

یعنی حاصل، دو برابر جذر ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله است. حالا کافی است معادله را حل کرده و ریشه‌ی بزرگ‌تر آن را به‌دست آوریم:

$$\underbrace{2}_{a}x^2\underbrace{-(\sqrt{5}+2)}_{b}x\underbrace{+\sqrt{5}}_{c}=0 \xrightarrow[\alpha>\beta]{a+b+c=0} \begin{cases} \beta=1 \\ \alpha=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\alpha>\beta} A=2\sqrt{\alpha}=2\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}=(\sqrt{2})^2\times\frac{\sqrt{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}\times\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{2^2}\times\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{20}$$

۵۰۵. گزینه ۲ ابتدا مقدار $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ را به کمک ضرایب معادله به‌دست آورده، سپس شرط تشکیل دنباله‌ی حسابی را اعمال می‌کنیم:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=m \ , \ P=x_1x_2=\frac{c}{a}=2$$

دنباله‌ی حسابی: $4,m,2 \Rightarrow 2m=4+2=6 \Rightarrow m=3$

یادآوری: اگر a,b,c جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آن‌گاه رابطه‌ی $2b=a+c$ بین آن‌ها برقرار است.

۵۰۶. گزینه ۲ اگر ریشه‌ها را α و β بگیریم، بر اساس آنچه سؤال بیان می‌کند، داریم:

$$2\alpha=\frac{\beta}{2}+1 \xrightarrow{\times 2} 4\alpha=\beta+2 \xrightarrow{+\alpha} 5\alpha=(\alpha+\beta)+2$$

$$\xrightarrow[\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}]{\text{از ضرایب معادله}} 5\alpha=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{9}{10} \ \text{(یکی از ریشه‌های معادله)}$$

ریشه‌ی معادله در آن صدق می‌کند، پس:

$$4\alpha^2-10\alpha+2m=0 \xrightarrow{\alpha=\frac{9}{10}} 4(\frac{9}{10})^2-10(\frac{9}{10})+2m=0 \Rightarrow \frac{81}{25}-9+2m=0$$

$$\Rightarrow 2m=9-\frac{81}{25}=\frac{144}{25} \xrightarrow{\div 2} m=\frac{144}{50}\times\frac{2}{2}=\frac{288}{100}=2/88$$

۵۰۷. گزینه ۳ در چنین سؤال‌هایی با قرار دادن α و β در معادله (به‌عنوان ریشه‌های معادله) روابط را به گونه‌ای می‌سازیم که ما را به سمت جواب هدایت کند.

در اینجا داریم:

$$x^2-5x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2-5\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha^2+2=5\alpha \\ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در A}} \frac{\alpha}{\alpha^2+2}=\frac{\alpha}{5\alpha}=\frac{1}{5} \\ \beta^2-5\beta+2=0 \xrightarrow[\text{رو اضافه کن}]{-\beta+5} \beta^2-6\beta+7=-\beta+5 \\ \xrightarrow[\text{در A}]{\text{جای‌گذاری}} \frac{\beta-5}{\beta^2-6\beta+7}=\frac{\beta-5}{-\beta+5}=\frac{(\beta-5)}{-(\beta-5)}=-1 \end{cases}$$

بنابراین:

$$A=\frac{1}{5}-(-1)=\frac{1}{5}+1=\frac{6}{5}$$

۵۰۸. گزینه ۴ اگر رابطه‌ی داده‌شده را به‌صورت $2a+b+12=0$ بنویسیم و با معادله‌ی داده‌شده مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که یکی از ریشه‌ها $x_1=-2$ است: ببینید:

$$3(-2)^2-a(-2)+b=0 \Rightarrow 12+2a+b=0$$

بنابراین داریم:

$$3x^2-ax+b=0 \Rightarrow P=x_1x_2=\frac{b}{3} \xrightarrow{x_1=-2} -2x_2=\frac{b}{3} \Rightarrow x_2=-\frac{b}{6}$$

۵۰۹. گزینه ۴ ابتدا توجه کنید که $S=\alpha+\beta=2$ و $P=\alpha\beta=\frac{3}{4}$. حالا تلاش می‌کنیم عبارت $\alpha^4+\beta^4$ را به کمک اتحاد $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$ برحسب S و P بنویسیم و...

$$\alpha^4+\beta^4=(\underset{A}{\alpha^2})^2+(\underset{B}{\beta^2})^2=(\underbrace{\alpha^2+\beta^2}_{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta})^2-2\alpha^2\beta^2$$

$$=((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta)^2-2(\alpha\beta)^2=(S^2-2P)^2-2P^2$$

$$=(4-\frac{3}{2})^2-2(\frac{9}{16})=\frac{25}{4}-\frac{9}{8}=\frac{50-9}{8}=\frac{41}{8}$$

زرنگی: با محاسبه‌ی $\Delta = 4 - 3 = 1$، ریشه‌ها را یافته و...

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 = \frac{81}{16} + \frac{1}{16} = \frac{41}{8}$$

۵۱۰. گزینه ۱ α ریشه‌ی معادله است و در آن صدق می‌کند:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha \quad \text{✻}$$

حالا با توجه به رابطه‌ی ✻ حاصل عبارت موردنظر را به‌دست می‌آوریم:

$$(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2 = (2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= 4((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = 4(2^2 - 2(-4)) = 4(4 + 8) = 48$$

مقادیر $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از روی ضرایب معادله محاسبه کرده‌ایم:

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2 \ , \ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$$

۵۱۱. گزینه ۱ وقتی نمودار یک سهمی محور xها را در هر دو طرف مبدأ قطع می‌کند، معادله‌ی مربوطه دو ریشه دارد: یکی مثبت و دیگری منفی و این یعنی حاصل‌ضرب ریشه‌ها باید منفی باشد:

$$P = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{1-m}{m+2}}_{P} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت } P} \begin{cases} 1 - m = 0 \\ m + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{(ریشه‌ی صورت)} \\ m = -2 & \text{(ریشه‌ی مخرج)} \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{جدول}}$

m	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
P	−	ت ن	+	○	−
	✓				✓

$$\xrightarrow[P<0 \text{ باشد}]{\text{می‌خواهیم}} m \text{ مجموعه‌ی مقادیر مورد قبول} = \{m \mid m < -2 \text{ یا } m > 1\}$$

۵۱۲. گزینه ۴ شرط داشتن دو ریشه‌ی حقیقی منفی متمایز در معادله‌ی درجه‌ی دوم عبارت است از: $S < 0 \ , \ P > 0 \ , \ \Delta > 0$

بنابراین: $\Delta = (-2m)^2 - 4(m-6)(-3) = 4m^2 + 12m - 72 > 0$

$$\xrightarrow{\div 4} \Delta = m^2 + 3m - 18 > 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (m+6)(m-3) > 0$$

$\xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{جدول}}$

m	$-\infty$	-6		3	$+\infty$
$m^2+3m-18$	+	○	−	○	+
	✓				✓

$$\Rightarrow m < -6 \text{ یا } m > 3 \quad \boxed{1}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m - 6 < 0 \Rightarrow m < 6 \quad \boxed{2}$$

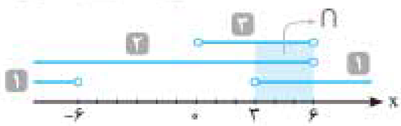
$$S = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{m-6} < 0$$

$\xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{جدول}}$

m	$-\infty$	0		6	$+\infty$
$2m$	−	○	+		+
$m-6$	−		−		+
$\frac{2m}{m-6}$	+	○	−	ت ن	+
			✓		

$$\Rightarrow 0 < m < 6 \quad \boxed{3}$$

$$\boxed{1} \cap \boxed{2} \cap \boxed{3} \Rightarrow 3 < m < 6 = \text{جواب نهایی}$$



زرنگی: به ازای $m = 6$ ضریب x^2 صفر می‌شود، پس گزینه‌ی «۲» غلط‌ه!

$$m = 2 \xrightarrow{\text{در معادله}} -4x^2 - 4x - 3 = 0$$

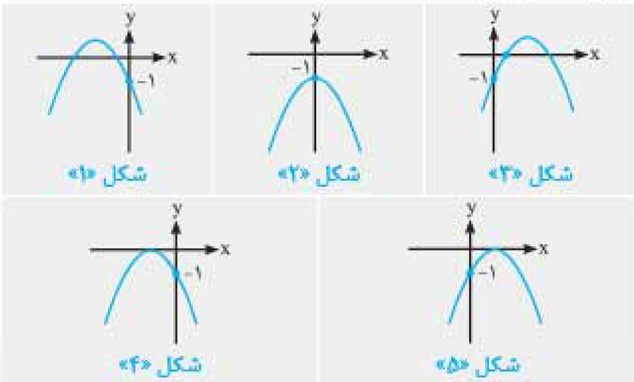
$$\xrightarrow{\text{وجود ریشه}} \Delta = (-4)^2 - 4(-4)(-3) = -32 \xrightarrow[\text{ندارد}]{\text{ریشه}} \text{حذف گزینه‌ی «۳»}$$

$$m = -7 \xrightarrow{\text{در معادله}} -13x^2 + 14x - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ریشه‌ها}} -\frac{b}{a} = \frac{14}{13} > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه‌ی منفی ندارد} \Rightarrow \text{حذف گزینه‌ی «۱»}$$

۵۱۳. گزینه ۱ ابتدا توجه کنید که به ازای $a = 3$ ضابطه‌ی تابع می‌شود $f(x) = 3x - 1$ و نمودار تابع f از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. فرض کنید $a \neq 3$. می‌دانیم اگر ضریب x^2 بزرگ‌تر از صفر باشد، نمودار تابع درجه‌ی دوم حتماً از ناحیه‌ی اول می‌گذرد. پس حتماً باید: $a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad \boxed{1}$

با شرط $a < 3$، یکی از شکل‌های زیر را می‌توانیم در نظر بگیریم. البته توجه داشته باشید که $f(0) = -1$ است، یعنی نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند.



از این ۵ شکل، فقط شکل «۳» مدنظر ما نیست، پس شرایط شکل «۳» را محاسبه کرده و آن را از شرط $a < 3$ کم می‌کنیم (اصل متمم). اما مشاهده می‌کنیم که در شکل «۳» نمودار تابع در دو نقطه با طول‌های مثبت محور xها را قطع کرده است، یعنی شرایط شکل «۳» به‌صورت مقابل است: $\Delta > 0, P > 0, S > 0$

و اما حل این سه نامعادله:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(a-3)(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a+6)(a-2) > 0$$

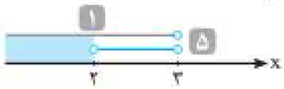
$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} a < -6 \text{ یا } a > 2 \quad \boxed{2}$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad \boxed{3}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-a}{a-3} > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < a < 3 \quad \boxed{4}$$

$$\xrightarrow{\boxed{2} \cap \boxed{3} \cap \boxed{4}} 2 < a < 3 \quad \boxed{5}$$

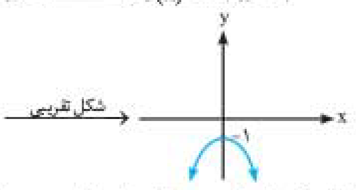
حالا برای پیدا کردن جواب نهایی مسئله باید ۵ را از ۱ کم کنیم، پس جواب نهایی مسئله برابر است با: $a \leq 2$



زرنگی: این‌جوری فرض کن:

$$a = 0 \xrightarrow{\text{در تابع}} f(x) = -3x^2 - 1$$

$\xrightarrow{\text{شکل تقریبی}}$



می‌بینید که سهمی از ناحیه‌ی اول نمی‌گذرد! پس هر گزینه‌ای که $a = 0$ را قبول ندارد، حذف می‌شود: یعنی گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴»!

۵۱۴. گزینه ۲

$$\begin{cases}\alpha=۱-\sqrt{۲}\\ \beta=۱+\sqrt{۲}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=(۱-\sqrt{۲})+(۱+\sqrt{۲})=۲ \\ P=\alpha\beta=(۱-\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲})=۱^۲-(\sqrt{۲})^۲ \\ \quad =۱-۲=-۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^۲-Sx+P=۰} x^۲-۲x-۱=۰$$

کمی اضافه‌تر: اگر معادله‌ی $x^۲-۲x-۱=۰$ در گزینه‌ها وجود نداشته باشد، به جای آن می‌توان هر مضربی از معادله را به‌عنوان معادله‌ی موردنظر معرفی کرد. برای مثال به جای همین معادله‌ی $x^۲-۲x-۱=۰$ می‌توان هر یک از معادله‌های $-۲x^۲+۴x+۲=۰$ (۲- برابر آن) یا $\frac{x^۲}{۳}-\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۳}=۰$ ($\frac{۱}{۳}$ برابر آن) را معرفی کرد.

۵۱۵. گزینه ۱ معادله‌ی درجه‌ی دومی با $S=-۱/۵$ و $P=-۷$ تشکیل می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم: $x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲+۱/۵x-۷=۰$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم تا ساده‌تر بشه}]{\text{ابتدا در ۲ ضرب}} ۲x^۲+۳x-۱۴=۰$$

$$\xrightarrow[(\Delta=۹+۱۱۲=۱۲۱)]{\text{از }\Delta\text{ برو}} x=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۲۱}}{۲(۲)}=\frac{-۳\pm۱۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{-۳+۱۱}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲ \ \text{(درگزینه‌ها نیست)}\\ \text{یا}\\ \beta=\frac{-۳-۱۱}{۴}=\frac{-۱۴}{۴}=\frac{-۷}{۲}\end{cases}$$

۵۱۶. گزینه ۲ با توجه به فرض سؤال $S=۲\sqrt{۳}$ و $P=-۱$. از طرفی معادله‌ی موردنظر به‌صورت $x^۲-Sx+P=۰$ است؛ پس:

$$\underset{\text{(این تو گزینه‌ها نیستا)}}{x^۲-۲\sqrt{۳}x-۱=۰} \xrightarrow{\times\sqrt{۳}} \sqrt{۳}x^۲-۶x-\sqrt{۳}=۰ \ ✓$$

۵۱۷. گزینه ۲ ریشه‌های معادله با ضرایب معلوم $۳x^۲+۷x+۱=۰$ را α و β و ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$ را $x_۱$ و $x_۲$ می‌نامیم. بر اساس گفته‌ی تست $x_۱=\alpha+۱$ و $x_۲=\beta+۱$ است. از طرفی با توجه به ضرایب معادله‌ی $۳x^۲+۷x+۱=۰$، $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-۷}{۳}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{۱}{۳}$ است.
اکنون توجه کنید که:

$$P=x_۱x_۲=(\alpha+۱)(\beta+۱)=\alpha\beta+\alpha+\beta+۱=\frac{۱}{۳}-\frac{۷}{۳}+۱=-۱$$

$$\xrightarrow[p=b]{x^۲+ax+b=۰} b=-۱$$

۵۱۸. گزینه ۴ جواب‌های معادله‌ی $x^۲-bx-۲c=۰$ را α و β در نظر می‌گیریم؛ برای جواب‌های معادله‌ی مطلوب (که آن‌ها را $x_۱$ و $x_۲$ فرض کرده‌ایم) داریم: $x_۱=-۲\alpha \ , \ x_۲=-۲\beta$

$$\Rightarrow\begin{cases} S=x_۱+x_۲=-۲\alpha-۲\beta=-۲(\alpha+\beta)\xrightarrow{\alpha+\beta=b} S=-۲b\\ P=x_۱x_۲=(-۲\alpha)(-۲\beta)=۴\alpha\beta\xrightarrow{\alpha\beta=-۲c}P=-۸c\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^۲-Sx+P=۰} x^۲+۲bx-۸c=۰$$

۵۱۹. گزینه ۴ ابتدا مقادیر S و P را به‌دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=(\sqrt{a}-\sqrt{a+۱})+(\sqrt{a}+\sqrt{a+۱})=۲\sqrt{a}$$

$$P=\alpha\beta=(\sqrt{a}-\sqrt{a+۱})(\sqrt{a}+\sqrt{a+۱})=(\sqrt{a})^۲-(\sqrt{a+۱})^۲$$

$$=a-(a+۱)=-۱$$

بنابراین: $x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۲\sqrt{a}x-۱=۰$

زرنگی: این‌جوری فرض کن:

$$a=۱\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}}۱+\sqrt{۲}\ ,\ ۱-\sqrt{۲}\Rightarrow P=-۱\ ,\ S=۲$$

$$\xrightarrow{\text{معادله}} x^۲-۲x-۱=۰ \xrightarrow[a=۱]{\text{مطابقت با گزینه‌ها}} x^۲-۲\sqrt{a}x-۱=۰ \ ✓$$

۵۲۰. گزینه ۳ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x+۱=۰$ باشند، آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases}S=x_۱+x_۲=۴\\ P=x_۱x_۲=۱\end{cases}$$

همچنین اگر ریشه‌های معادله‌ی خواسته‌شده را α و β بنامیم، طبق فرض تست داریم:

$$\begin{cases}\alpha=-۳x_۱+۲\\ \beta=-۳x_۲+۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S'=\alpha+\beta=-۳(x_۱+x_۲)+۴=-۳(۴)+۴=-۸\\ P'=\alpha\beta=(-۳x_۱+۲)(-۳x_۲+۲)=۹x_۱x_۲-۶(x_۱+x_۲)+۴\\ \quad =۹-۲۴+۴=-۱۱\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی جدید}} x^۲-S'x+P'=۰ \xrightarrow{S'=-۸,\ P'=-۱۱} x^۲+۸x-۱۱=۰$$

زرنگی: اگر ریشه‌ی معادله‌ی $x^۲-۴x+۱$ را با x و ریشه‌ی معادله‌ی خواسته‌شده را با X نمایش دهیم، داریم:

$$X=۳(-x)+۲\Rightarrow ۳x=۲-X\Rightarrow x=\frac{۲-X}{۳}\xrightarrow{\text{قرار بده در معادله}}$$

$$(\frac{۲-X}{۳})^۲-۴(\frac{۲-X}{۳})+۱=۰\Rightarrow \frac{۴-۴X+X^۲}{۹}-\frac{۸-۴X}{۳}+۱=۰$$

$$\xrightarrow{\times۹} ۴-۴X+X^۲-۲۴+۱۲X+۹=۰\Rightarrow X^۲+۸X-۱۱=۰$$

۵۲۱. گزینه ۳ با توجه به ضرایب معادله‌ی $۲x^۲-۳x-۴=۰$، $\alpha+\beta=\frac{۳}{۲}$ و $\alpha\beta=-۲$ است و برای S و P معادله‌ی جدید داریم:

$$S=(\frac{۱}{\alpha}+۱)+(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۲=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}+۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲=\frac{-۳}{۴}+۲=\frac{۵}{۴}$$

$$P=(\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱=\frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱$$

$$=\frac{۱}{-۲}+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۱=\frac{-۱}{۲}-\frac{۳}{۴}+۱=\frac{-۲-۳+۴}{۴}=\frac{-۱}{۴}$$

حالا معادله‌ی جدید را به شکل $x^۲-Sx+P=۰$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^۲-\frac{۵}{۴}x-\frac{۱}{۴}=۰\xrightarrow{\times۴} ۴x^۲-۵x-۱=۰$$

۵۲۲. گزینه ۳ ابتدا معادله‌ی $x(۵x+۳)=۲$ را مرتب می‌کنیم و با توجه به ضرایب آن مقادیر $\alpha+\beta$ و $\alpha\beta$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۵x^۲+۳x-۲=۰\xrightarrow[\text{ریشه‌ها هستن}]{\beta \text{ و } \alpha}\begin{cases}\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۲}{۵}\\ \alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-۳}{۵}\end{cases}$$

سپس ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲-kx+۲۵=۰$ را $x_۱=\frac{۱}{\alpha^۲}$ و $x_۲=\frac{۱}{\beta^۲}$ فرض می‌کنیم:

$$S=x_۱+x_۲=\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{(\alpha\beta)^۲}$$

$$=\frac{(\frac{-۳}{۵})^۲-۲(\frac{-۲}{۵})}{(\frac{-۲}{۵})^۲}=\frac{\frac{۹}{۲۵}+\frac{۴}{۵}}{\frac{۴}{۲۵}}=\frac{۲۹}{۴}$$

از طرفی: $S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}=\frac{k}{۴}$

بنابراین: $\frac{k}{۴}=\frac{۲۹}{۴}\Rightarrow k=۲۹$ ✓

زرنگی: چون معادله‌ی $۵x^۲+۳x-۲=۰$ به‌راحتی حل می‌شود، مستقیماً ریشه‌های آن را به‌دست می‌آوریم و...

$5x^2+3x-2=0 \xrightarrow{a+c=b} \alpha=-1$ یا $\beta=\frac{-c}{a}=\frac{2}{5}$

ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-kx+25=0$ عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{\alpha^2}=1 \xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{در معادله}} 4-k+25=0 \Rightarrow k=29 \ ✓ \\ x_2=\frac{1}{\beta^2}=\frac{25}{4} \end{cases}$$

۵۲۳. گزینه ۲ ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$ را α و β و ریشه‌های معادله‌ی مطلوب را x_1 و x_2 فرض می‌کنیم. در این‌صورت بر اساس گفته‌ی سؤال، $x_1=\alpha^2$ و $x_2=\beta^2$ بوده و با توجه به این‌که $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=3\sqrt{2}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=4$ است، مقادیر $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ را یافته و معادله را به شکل $x^2-Sx+P=0$ تشکیل می‌دهیم:

$$S=x_1+x_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(3\sqrt{2})^2-2(4)=18-8=10$$

$$P=x_1x_2=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(4)^2=16 \Rightarrow x^2-10x+16=0$$

۵۲۴. گزینه ۱ می‌دانیم که منظور از صفرهای تابع $f(x)=x-3\sqrt{x}+2$، ریشه‌های معادله‌ی $x-3\sqrt{x}+2=0$ است. از طرفی این معادله با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ (که معادل $x=t^2$ است) به معادله‌ی درجه‌ی دوم $t^2-3t+2=0$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$t^2-3t+2=0 \xrightarrow[\text{ضرایب صفر}]{\text{مجموع}} \begin{cases} t=1 \\ \text{یا} \\ t=\frac{2}{1}=2 \end{cases} \xrightarrow{x=t^2} \begin{cases} x=1^2=1=\alpha \\ \text{یا} \\ x=2^2=4=\beta \end{cases}$$

بنابراین دنبال معادله‌ای هستیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}+1=\frac{1}{1}+1=2$ و $\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$ هستند. برای این منظور مقادیر $S=2+\frac{5}{4}=\frac{13}{4}$ و $P=2\times\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$ را محاسبه می‌کنیم و معادله را به شکل $x^2-Sx+P=0$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-Sx+P=0 \xrightarrow[P=\frac{5}{2}]{S=\frac{13}{4}} x^2-\frac{13}{4}x+\frac{5}{2}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-13x+10=0$$

۵۲۵. گزینه ۳ اگر ریشه‌های معادله‌ی $8x^2-mx-8=0$ را x_1 و x_2 و ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-2=0$ را α و β بنامیم، بر اساس فرض تست و رابطه‌ی مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها می‌توان نوشت:

$$8x^2-mx-8=0 \xrightarrow[\text{هستن}\ x_2\ \text{و}\ x_1]{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} x_1=\alpha^3 \\ x_2=\beta^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\alpha^3+\beta^3=\frac{m}{8}\ ,\quad x_1x_2=\alpha^3\beta^3=-1$$

$$2x^2-x-2=0 \xrightarrow[\text{هستن}\ \beta\ \text{و}\ \alpha]{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} \alpha\beta=\frac{-2}{2}=-1 \\ \alpha+\beta=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال اگر طرفین رابطه‌ی $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ را به توان ۳ برسانیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\alpha^3+\beta^3}_{\frac{m}{8}}+3\underbrace{\alpha\beta}_{(-1)}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{(\frac{1}{2})}=\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{m}{8}-\frac{3}{2}=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{8}=\frac{3}{2}+\frac{1}{8}=\frac{13}{8} \xrightarrow{\times 8} m=13$$

۵۲۶. گزینه ۱ سؤال را از منظر دیگری حل می‌کنیم. ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-7x+3=0$ (به دلیل صفر شدن مجموع ضرایب) برابر $x_1=1$ و $x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$ بوده و در نتیجه ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ به‌صورت $\alpha=\frac{2}{x_1}=2$ و $\beta=\frac{2}{x_2}=\frac{8}{3}$ هستند. حال اگر مجموع این دو ریشه را برابر رابطه‌ی مجموع دو ریشه با توجه به ضرایب معادله‌ی $3x^2+ax+b=0$ قرار دهیم، مقدار a به‌دست می‌آید:

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a} \Rightarrow 2+\frac{8}{3}=\frac{-a}{3} \Rightarrow \frac{14}{3}=\frac{-a}{3} \Rightarrow a=-14$$

برای به‌دست آوردن مقدار b نیز می‌توانیم از حاصل‌ضرب ریشه‌ها کمک بگیریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow 2\times\frac{8}{3}=\frac{b}{3} \Rightarrow b=16$$

۵۲۷. گزینه ۳ با توجه به داده‌های سؤال، مستطیل زیر را رسم می‌کنیم:

$$S_{\text{مستطیل}}=(4m+3)\times m=45 \xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 4m^2+3m-45=0$$

$$\xrightarrow{\text{از روش }\Delta\text{ حل کن}} \Delta=b^2-4ac=(3)^2-4(4)(-45)=729>0 \Rightarrow$$ دو ریشه داریم.

$$\Rightarrow \begin{cases} m=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{729}}{8}=\frac{-3+27}{8} \\ \quad=\frac{24}{8}=3=\text{عرض},\ 4a+3=4(3)+3=15=\text{طول} \\ \text{یا} \\ m=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{729}}{8}=\frac{-3-27}{8} \\ \quad=\frac{-30}{8}<0 \ ✗ \end{cases}$$

بنابراین: $\text{قطر}=\sqrt{3^2+15^2}=\sqrt{234}$

۵۲۸. گزینه ۴ همان‌طور که گفتیم در یک لیگ با n تیم، که هر تیم با دیگر تیم‌های لیگ فقط یک بازی انجام می‌دهد، تعداد کل بازی‌های انجام‌شده از رابطه‌ی $N=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n=\frac{n(n-1)}{2}$ به‌دست می‌آید.

در اینجا داریم:

$$\frac{n(n-1)}{2}=105 \Rightarrow n(n-1)=2\times 105 \Rightarrow n^2-n-210=0$$

$$\Rightarrow (n-15)(n+14)=0 \Rightarrow n=15$$

۵۲۹. گزینه ۱ با توجه به شکل، طول قاب مستطیل‌شکل برابر $2x+15$ و عرض آن $2x+10$ است. داریم: $(2x+15)(2x+10)=300$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌ی مشترک}} (2x)^2+(15+10)(2x)+15\times 10=300$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 4x^2+50x-150=0 \xrightarrow{\div 2} \underset{(a=2,\ b=25,\ c=-75)}{2x^2+25x-75=0}$$

$$\xrightarrow{\text{از }\Delta\text{ برو}} \Delta=(25)^2-4(2)(-75)=625+600=1225$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{1225}=35 \Rightarrow x=\frac{-25\pm 35}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{4}=\frac{5}{2} \ ✓ \\ x=\frac{-60}{4}<0 \ ✗ \end{cases} \Rightarrow \text{ابعاد قاب}=(2x+10)\times(2x+15)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{5}{2}} (2\times\frac{5}{2}+10)\times(2\times\frac{5}{2}+15)=15\times 20$$

۵۳۰. گزینه ۳

راهبرد: برای حل معادله‌ی درجه‌ی ۴، $ax^4+bx^2+c=0$ که به معادله‌ی «دو مجذوری» معروف است، از تغییر متغیر $x^2=t$ استفاده کرده و معادله‌ی درجه‌ی دوم، $at^2+bt+c=0$ را حل می‌کنیم. در این معادله اگر $\Delta=b^2-4ac<0$ باشد، هر دو معادله فاقد جواب حقیقی است. ولی اگر $\Delta\ge 0$ باشد، جواب‌های به‌دست آمده برای t را با توجه به تغییر متغیر $x^2=t$ $(x=\pm\sqrt{t})$ به جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی ۴ تبدیل کرده و بررسی می‌کنیم.

$$x^4-8x^2+8=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-8t+8=0$$

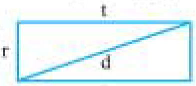
$$\xrightarrow[(\Delta=64-32=32)]{\text{از }\Delta\text{ برو}} t=\frac{8\pm\sqrt{32}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{8+\sqrt{32}}{2}\\ \text{یا}\\ t_2=\frac{8-\sqrt{32}}{2}\end{cases}$$

با توجه به این‌که $\sqrt{32}<8$ است، هر دو ریشه‌ی t_1 و t_2 مثبت بوده و با توجه به $x^2=t$ یا $x=\pm\sqrt{t}$ معادله‌ی اصلی چهار ریشه‌ی دوبه‌دو قرینه دارد:

$$x=\pm\sqrt{t} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{t_1}=\pm\sqrt{\frac{8+\sqrt{32}}{2}}\\ \text{یا}\\ x=\pm\sqrt{t_2}=\pm\sqrt{\frac{8-\sqrt{32}}{2}}\end{cases}$$

به نظرتون آیا می‌تونیم بگیم مجموع این ۴ ریشه برابر صفره؟!

۵۳۱. گزینه ۴ مستطیل با سیم به طول ۲۰ ساخته شده، پس محیط آن برابر ۲۰ است.



۱ $2r+2t=20 \xrightarrow{\div 2} r+t=10$

$$\xrightarrow{\text{r رو برحسب t پیدا کن}} r=10-t$$

۲ $\underbrace{d}_{\text{باید مینیمم شود}} = \underbrace{\sqrt{r^2+t^2}}_{\text{قطر مستطیل}} \xrightarrow[\text{بی‌خیال شو!}]{\text{رادیکال رو}} \underbrace{r^2+t^2}_{\text{مینیمم شود}}$

$$\xlongequal{\text{طبق ۱}}(10-t)^2+t^2 \xlongequal{\text{اتحاد}} 100-20t+t^2+t^2$$

به معادله‌ی یک سهمی رسیدیم که برای مینیمم شدن کافی است طول رأس آن را حساب کنیم:

$$\xlongequal{\text{ساده و مرتب کن}} 2t^2-20t+100 \xrightarrow{\text{مینیمم شود}} t=\frac{-b}{2a}=-\frac{-20}{2(2)}$$

$$=\frac{20}{4}=5 \xrightarrow{r+t=10} r=5 \xrightarrow[S=rt]{\text{مساحت مستطیل}} 5\times 5=25$$

زرنگی: از آنجایی که $r+t=10$، پس مجموع دو عدد مثبت، ثابت است. می‌خواهیم حاصل‌ضرب آن‌ها مینیمم شود؛ بنابراین $r=t=5$ و مساحت مستطیل برابر است با: $rt=5\times 5=25$

۵۳۲. گزینه ۲ مطابق شکل، اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم، طول فنس به‌کاررفته برابر است با: $x+2y=100$

از طرفی برای مساحت این مستطیل داریم:

$$S=xy \xrightarrow[\text{قرار بده: } x=100-2y]{\text{از } x+2y=100} S=(100-2y)y=-2y^2+100y$$

حال می‌خواهیم تابع مساحت (که معادله‌ی یک سهمی است) بیشترین مقدار خود را اختیار کند. یادمان هست که بیشترین مقدار یک سهمی در رأس آن اتفاق می‌افتد:

$$S=-2y^2+100y \Rightarrow x_{\text{رأس}}=\frac{-b}{2a}=\frac{-100}{2(-2)}=25$$

$$\Rightarrow S_{max}=S(25)=-2(25)^2+100(25)=-1250+2500=1250\,m^2$$

یعنی اگر ابعاد زمین مستطیل‌شکلی را به‌صورت $x\times y=50\times 25$ انتخاب کنیم، بیشترین مقدار ممکن برای مساحت ایجاد می‌شود.

$(x=100-2y=100-50=50)$

زرنگی: طبق نکته‌ی گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$x+2y=100 \xrightarrow[\text{که مقادیر مساوی باهم جمع شوند }(x,y>0)]{\text{حاصل‌ضرب xy موقعی ماکزیمم می‌شود}} \begin{cases}x=50\\ 2y=50\Rightarrow y=25\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{max}=xy=50\times 25=1250$$

۵۳۳. گزینه ۳ محیط یا پیرامون پنجره برابر است با: $3x+2y=4$

از طرفی مساحت پنجره که از مجموع مساحت‌های مستطیل و مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل می‌شود، برابر است با: $S=xy+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

حالا از رابطه‌ی $3x+2y=4$، y را برحسب x یافته و در رابطه‌ی S جایگزین می‌کنیم:

$$3x+2y=4 \Rightarrow 2y=4-3x \xrightarrow{\div 2} y=2-\frac{3}{2}x$$

$$\Rightarrow S=x(2-\frac{3}{2}x)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} S=2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{2})x^2+2x$$

$$\Rightarrow S=(\frac{\sqrt{3}-6}{4})x^2+2x \xrightarrow[\text{S شدن}]{\text{برای ماکزیمم}} x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(\frac{\sqrt{3}-6}{4})}=\frac{-4}{\sqrt{3}-6}$$

بنابراین:

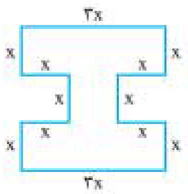
$$S_{max}=(\frac{\sqrt{3}-6}{4})(\frac{16}{(\sqrt{3}-6)^2})+\frac{-8}{\sqrt{3}-6}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}-6}-\frac{8}{\sqrt{3}-6}=\frac{-4}{\sqrt{3}-6}=\frac{4}{6-\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا کن}} \frac{4}{6-\sqrt{3}}\times\frac{6+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}=\frac{4(6+\sqrt{3})}{6^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{4(6+\sqrt{3})}{36-3}$$

$$\Rightarrow S_{max}=\frac{4}{33}(6+\sqrt{3})$$

۵۳۴. گزینه ۱ با توجه به فرض تست، شکل مقابل به‌دست می‌آید:



محیط شکل $=6x+10x=16x$

مساحت شکل $=(3x)^2-2x^2=7x^2$

$$\Rightarrow 7x^2=16x \Rightarrow 7x^2-16x=0 \Rightarrow x(7x-16)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ‌ق‌ق}\\ x=\frac{16}{7} & \checkmark\end{cases}$$

۵۳۵. گزینه ۲ با توجه به شکل مقابل، اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم، اولاً $y<x$ است (می‌دونی که چرا؟)، ثانیاً طبق گفته‌ی تست داریم:

محیط: $P=2(x+y)=9 \Rightarrow x+y=\frac{9}{2} \Rightarrow y=\frac{9}{2}-x$ (*)

مساحت: $S=xy=5 \xrightarrow{*} x(\frac{9}{2}-x)=5$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} \frac{9}{2}x - x^2 = 5 \xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0 \xrightarrow[\text{(برای سادگی محاسبات)}]{\times 2}$$

$$\underset{(a=2,b=-9,c=10)}{2x^2 - 9x + 10 = 0} \xrightarrow[(\Delta=(-9)^2-4(2)(10)=1)]{\text{از }\Delta\text{ برو}} x = \frac{9\pm 1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9+1}{4} = \frac{5}{2} = 2/5 \longrightarrow y = 2 \quad (x=2/5, y=2) \ ✓ \\ \text{یا} \\ x = \frac{9-1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \longrightarrow y = 2/5 \quad (x=2, y=2/5) \ \times \end{cases}$$

واضح است که به دلیل بزرگ‌تر بودن طول نسبت به عرض، حالت $x=2/5$ و $y=2$ مورد قبول است!

۵۳۶. (گزینه ۲) می‌دانیم $0 \le \frac{x^2}{x^2+1} < 1$، بنابراین توان دوم این عبارت هم بین صفر و یک قرار دارد، پس:

$$\begin{cases} 0 \le (\frac{x^2}{x^2+1})^2 < 1 \\ 0 \le \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le (\frac{x^2}{x^2+1})^2 + \frac{x^2}{x^2+1} < 2$$

$$\xrightarrow{-6} -6 \le (\frac{x^2}{x^2+1})^2 + \frac{x^2}{x^2+1} - 6 < -4$$

پس عبارت سمت چپ معادله نمی‌تواند مساوی صفر باشد و در نتیجه معادله، ریشه‌ی حقیقی ندارد.

زرنگی: $t = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=-3 \\ t=2 \end{cases}$

چون $t \ge 0$ است، پس $t=-3$ غیرقابل قبول است. اگر $t=2$ باشد، آن‌گاه:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = 2 \Rightarrow x^2 = 2x^2 + 2 \Rightarrow x^2 = -2 \quad \text{غیرممکن}$$

بنابراین معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۵۳۷. (گزینه ۱) با اعمال تغییر متغیر $x^2 = t$ داریم:

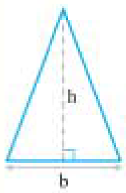
$$2t^2 - 7t - 4 = 0 \xrightarrow[(\Delta=49+32=81)]{\text{از }\Delta\text{ برو}} t = \frac{7\pm\sqrt{81}}{2(2)} = \frac{7\pm 9}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ \text{یا} \\ t_2 = \frac{7-9}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{رو وارد بازی کن}]{\text{حالا فرض } x^2=t} \begin{cases} x^2 = 4 \xrightarrow{\text{جذربگیر}} x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x=2 \text{ یا } x=-2 \\ \text{یا} \\ x^2 = \frac{-1}{2} \ \times \ \text{(هیچ x حقیقی این تساوی رو برقرار نمی‌کنه)} \end{cases}$$

یعنی معادله دو ریشه‌ی قرینه دارد!

۵۳۸. (گزینه ۲) اگر مثلثی با ارتفاع h و قاعده‌ی b مطابق شکل روبه‌رو در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:



فرض سؤال: $b + h = 12 \Rightarrow b = 12 - h$

فرمول مساحت: $S = \frac{1}{2}bh \longrightarrow S = \frac{1}{2}(12-h)h = 6h - \frac{1}{2}h^2$

$$\Rightarrow S = \frac{-1}{2}h^2 + 6h \xrightarrow{\text{برای ماکزیمم شدن S}} h = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(\frac{-1}{2})} = 6$$

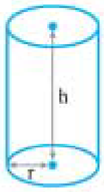
$$\Rightarrow S_{max} = S(6) = \frac{-1}{2}(6)^2 + 6(6) = -18 + 36 = 18$$

یعنی بین مثلث‌هایی که مجموع ارتفاع و قاعده‌ی وارد بر آن ارتفاع برابر ۱۲ است، بیشترین مساحت را مثلثی دارد که سهم ارتفاع و قاعده‌ی آن از عدد ۱۲ یکسان باشد $(b = h = \frac{12}{2} = 6)$.

کمی اضافه‌تر: وقتی مجموع چند عبارت مثبت مقدار ثابتی است، حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی بیشترین مقدار ممکن را دارد که آن عبارت‌ها سهم یکسانی از حاصل جمع داشته باشند. مثلاً وقتی $b+h=12$ است، برای ماکزیمم شدن $S = \frac{1}{2}bh$ (که به معنای ماکزیمم شدن bh نیز هست) باید $b = h = \frac{12}{2} = 6$ باشد؛ یعنی:

$$S_{max} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

۵۳۹. (گزینه ۲) استوانه‌ای با شعاع قاعده‌ی r (قطر $2r$) و ارتفاع h در نظر می‌گیریم:



فرض تست: $2r + h = 15 \Rightarrow h = 15 - 2r$

مساحت جانبی استوانه: $S = 2\pi rh$

$$\longrightarrow S = 2\pi r(15 - 2r) = 30\pi r - 4\pi r^2$$

نمودار تابع S برحسب r یک سهمی بوده که دارای بالاترین نقطه است $(a = -4\pi < 0)$ و زمانی حداکثر مقدار خود را اختیار می‌کند که $r = \frac{-b}{2a} = \frac{-30\pi}{2(-4\pi)} = \frac{15}{4}$ انتخاب شود:

$$S_{max} = S(\frac{15}{4}) = -4\pi(\frac{15}{4})^2 + 30\pi(\frac{15}{4}) = -\frac{225}{4}\pi + \frac{450}{4}\pi = \frac{225}{4}\pi$$

۵۴۰. (گزینه ۲) اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی موردنظر را به‌صورت شکل مقابل در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

رابطه‌ی فیثاغورس: $a^2 + b^2 = (\sqrt{106})^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 106$

فرض سؤال: $a + b = 14 \Rightarrow b = 14 - a$

حال اگر در رابطه‌ی $a^2 + b^2 = 106$، $b = 14 - a$ قرار دهیم، داریم:

$$a^2 + (14-a)^2 = 106 \xrightarrow[\text{بازکن}]{\text{اتحاد رو}} a^2 + 196 - 28a + a^2 = 106$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 2a^2 - 28a + 90 = 0 \xrightarrow{\div 2} a^2 - 14a + 45 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد جمله‌ی مشترک}]{\text{حل از روش تجزیه}} (a-9)(a-5) = 0$$

$$\xrightarrow[\text{حاصل‌ضرب صفر}]{\text{ویژگی}} \begin{cases} a - 9 = 0 \Rightarrow a = 9 \\ \text{یا} \\ a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5 \end{cases} \xrightarrow[b=14-a]{\text{با توجه به فرض}} \begin{cases} b = 14 - 9 = 5 \\ \text{یا} \\ b = 14 - 5 = 9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در هر دو حالت}} S = \frac{1}{2} \times 9 \times 5 = \frac{45}{2} = 22/5$$

۵۴۱. (گزینه ۴) ابتدا با توجه به تساوی $(x^2-1)^3 = -(1-x^2)^3$ معادله را به شکل $(1-x^2)^6 + 19(1-x^2)^3 - 216 = 0$ بازنویسی می‌کنیم. حالا با فرض $(1-x^2)^3 = u$ به معادله‌ی درجه‌ی دوم $u^2 + 19u - 216 = 0$ می‌رسیم: بنابراین:

$$u^2 + 19u - 216 = 0 \xrightarrow{\text{حل از روش }\Delta}$$

$$\Delta = (19)^2 - 4(1)(-216) = 361 + 864 = 1225 \xrightarrow{\sqrt{1225}=35}$$

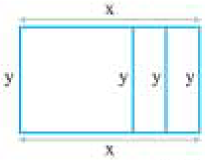
$$u = \frac{-19 \pm 35}{2} \Rightarrow u = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{یا} \quad u = -\frac{54}{2} = -27$$

ما به‌دنبال جواب‌های معادله برحسب x هستیم، پس برمی‌گردیم به فرض $u = (1-x^2)^3$:

$$\begin{cases} (1-x^2)^3 = 8 \Rightarrow 1 - x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{فاقد جواب} \\ \text{یا} \\ (1-x^2)^3 = -27 \Rightarrow 1 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های معادله‌ی اصلی ۲ و ۲- است که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $(2)(-2) = -4$ است.

۵۴۲. (گزینه ۴) مطابق شکل اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y بنامیم، برای سیمی به طول ۸۰۰ متر می‌توان نوشت:



$$2x+4y=800 \Rightarrow x+2y=400$$

از طرفی با توجه به فرض سؤال، برای مساحت مستطیل داریم:

$$xy=20000 \xrightarrow[\text{قرار بده } x=400-2y]{\text{از رابطه‌ی } x+2y=400} y(400-2y)=20000$$

$$\Rightarrow 400y-2y^2=20000 \xrightarrow[\text{و مرتب‌کن}]{\div 2} \underbrace{y^2-200y+10000}_{\text{این همون اتحاد } (y-100)^2 \text{ است}}=0$$

$$\Rightarrow (y-100)^2=0 \Rightarrow y-100=0 \Rightarrow y=100\,cm \ (\text{عرض مستطیل})$$

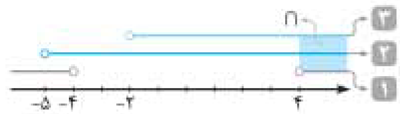
$$\xrightarrow{\text{برای طول}} x=400-2y=400-2(100)=200\,cm$$

۵۴۳. (گزینه ۲) معادله‌ی دو مجذوری $ax^4+bx^2+c=0$ زمانی چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد که معادله‌ی درجه‌ی دوم $at^2+bt+c=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد، زیرا به ازای هر t مثبت، دو مقدار برای x به‌دست می‌آید و این زمانی رخ می‌دهد که $\Delta>0$، $S=\frac{-b}{a}>0$ و $P=\frac{c}{a}>0$ باشد:

$$x^4-(m+2)x^2+(m+5)=0 \xrightarrow{x^2=t} \underset{(a=1,b=-(m+2),c=m+5)}{t^2-(m+2)t+(m+5)=0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta=(m+2)^2-4(1)(m+5)>0 \Rightarrow m^2-16>0 \\ \Rightarrow m^2>16 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} m>4 \text{ یا } m<-4 \quad (1) \\ \text{و} \\ P=\frac{c}{a}=\frac{m+5}{1}>0 \Rightarrow m>-5 \quad (2) \\ \text{و} \\ S=\frac{-b}{a}=\frac{m+2}{1}>0 \Rightarrow m>-2 \quad (3) \end{cases}$$

بنابراین: مقادیر قابل قبول $m = (1)\cap(2)\cap(3)=(4,+\infty)$



۵۴۴. (گزینه ۴)

توجه: یادتان باشد که تعداد ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+b|x|+c=0$ با تعداد ریشه‌های معادله‌ی دومجذوری $ax^4+bx^2+c=0$ یکی است. (علت این موضوع در ماهیت یکسان x^2 و $|x|$ نهفته است. هر دو همواره نامنفی هستند.)

معادله‌ی $x^2-4|x|+2=0$ با توجه به این‌که $\Delta=16-8>0$، $S=4>0$ و $P=2>0$، چهار ریشه‌ی دوبه‌دو قرینه دارد. اگر معادله را برحسب $|x|$ حل کنیم، به‌سادگی این موضوع را خواهید دید:

$$x^2=|x|^2: \ |x|^2-4|x|+2=0 \xrightarrow{|x|=t} t^2-4t+2=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{t=|x|} \begin{cases} |x|=2+\sqrt{2} \Rightarrow x=\pm(2+\sqrt{2}) \\ \text{یا} \\ |x|=2-\sqrt{2}>0 \Rightarrow x=\pm(2-\sqrt{2}) \end{cases}$$

۵۴۵. (گزینه ۲) فرم معادله به‌گونه‌ای است که ما را به سمت معادله‌ی دو مجذوری هدایت می‌کند. با فرض $t=(x^2-1)^2$ به معادله‌ی درجه‌ی دوم $t^2+t-2=0$ می‌رسیم و...

$$t^2+t-2=0 \xrightarrow[(a+b+c=0)]{\text{مجموع ضرایب، صفر}} \begin{cases} t_1=1 \\ \text{یا} \\ t_2=\frac{c}{a}=-2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t=(x^2-1)^2} \begin{cases} (x^2-1)^2=1 \xrightarrow{\text{جذر}} \begin{cases} x^2-1=1 \Rightarrow x^2=2 \\ \xrightarrow{\text{جذر}} x=\pm\sqrt{2} \\ \text{یا} \\ x^2-1=-1 \Rightarrow x^2=0 \\ \Rightarrow x=0 \end{cases} \\ \text{یا} \\ (x^2-1)^2=-2 \ \times \ (\text{نشدنی!}) \end{cases}$$

بنابراین حاصل‌ضرب ریشه‌های غیرصفر معادله برابر است با:

$$(\sqrt{2})(-\sqrt{2})=-2$$

۵۴۶. (گزینه ۱) مساحت متوازی‌الاضلاع از حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعده‌ی آن به‌دست می‌آید:

$$S=bh \xrightarrow[b=9-h]{b+h=9} S=(9-h)h=-h^2+9h$$

$$\xrightarrow[\text{S شدن}]{\text{برای max}} h=\frac{-b}{2a}=\frac{-9}{2(-1)}=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow S_{max}=S(\frac{9}{2})=-(\frac{9}{2})^2+9(\frac{9}{2})=-\frac{81}{4}+\frac{81}{2}=\frac{81}{4}$$

$$=\frac{80+1}{4}=\frac{80}{4}+\frac{1}{4}=20+0.25=20.25$$

زرنگی: طبق نکات گفته‌شده در درسنامه، اگر مجموع دو عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی ماکزیمم می‌شود که دو عدد با هم برابر باشند؛ پس:

$$\begin{cases} b+h=9 \\ b=h \end{cases} \Rightarrow b=h=4.5 \Rightarrow S=bh=4.5\times4.5=20.25$$

۵۴۷. (گزینه ۲) با انتخاب نقطه‌ی $A(a,a^2-3a+3)$ به طول a روی سهمی به معادله‌ی $y=x^2-3x+3$ و نقطه‌ی $B(a,\frac{-1-a}{2})$ به طول a روی خط به معادله‌ی $2y+x+1=0$ (که معادل $y=\frac{-1-x}{2}$ است)، طول AB را محاسبه می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(a-a)^2+(a^2-3a+3+\frac{1+a}{2})^2}$$

$$=\sqrt{(a^2-\frac{5}{2}a+\frac{7}{2})^2}=|a^2-\frac{5}{2}a+\frac{7}{2}|=a^2-\frac{5}{2}a+\frac{7}{2}$$

توجه کنید که در عبارت درجه‌ی دوم $a^2-\frac{5}{2}a+\frac{7}{2}$ داریم:

$$\Delta=(-\frac{5}{2})^2-4(1)(\frac{7}{2})=\frac{25}{4}-14<0$$

چون ضریب a^2 مثبت است، پس این عبارت همواره مثبت است. در نتیجه:

$$|a^2-\frac{5}{2}a+\frac{7}{2}|=a^2-\frac{5}{2}a+\frac{7}{2}$$

نمودار تابع فاصله‌ی AB یک سهمی است و به دلیل مثبت بودن ضریب a^2، مینیمم دارد و مقدار این مینیمم به‌ازای $a=\frac{-(-\frac{5}{2})}{2(1)}=\frac{5}{4}$ به‌دست می‌آید؛ پس:

$$AB_{min}=(\frac{5}{4})^2-\frac{5}{2}(\frac{5}{4})+\frac{7}{2}=\frac{25}{16}-\frac{25}{8}+\frac{7}{2}=\frac{-25}{16}+\frac{7}{2}=\frac{31}{16}$$

۵۴۸. گزینه ۳ محیط یا پیرامون زمین از دوتا طول مستطیل ($2a$) و دوتا محیط نیم‌دایره‌ای به شعاع $\frac{b}{2}$، ($2\times\pi(\frac{b}{2})=\pi b$) تشکیل شده است:

$$2a+\pi b=600 \xrightarrow{\pi\simeq 3} 2a+3b=600$$

از طرفی مساحت قسمت مستطیل‌شکل زمین تنیس برابر است با: $S=ab$

حال برای این‌که تابع مساحت مستطیل را فقط برحسب یک پارامتر (مثلاً b) بنویسیم، کافی است از رابطه‌ی $2a+3b=600$، مقدار a را برحسب b یافته و در تساوی $S=ab$ جای‌گذاری کنیم:

$$2a+3b=600 \Rightarrow 2a=600-3b \xrightarrow{\div 2} a=300-\frac{3}{2}b$$

$$\Rightarrow S=ab=(300-\frac{3}{2}b)b \Rightarrow S=\frac{-3}{2}b^2+300b$$

$$\xrightarrow{\text{برای حداکثرشدن S}} b=\frac{-300}{2(\frac{-3}{2})}=\frac{300}{3}=100\,m \Rightarrow a=300-\frac{3}{2}(100)$$

$$\Rightarrow a=150\,m \Rightarrow S_{max}=150\,m\times 100\,m=15000\,m^2$$

زرنگی: هنگامی که جمع دو عبارت مثبت مقداری ثابت است ($2a+3b=600$)، ضرب آن‌ها (یعنی $2a\times 3b=6ab$ و در نتیجه ab) زمانی ماکزیمم می‌شود که آن عبارت‌ها سهم یکسانی از جمع داشته باشند؛ پس:

$$2a=300 \Rightarrow a=150\,m$$
$$3b=300 \Rightarrow b=100\,m$$
$$\Rightarrow S_{max}=150\,m\times 100\,m=15000\,m^2$$

حالا به نظر شما در این سؤال حداکثر مساحت کل زمین تنیس چند متر مربع است؟

۵۴۹. گزینه ۲ از آنجا که α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-5x+1=0$ هستند، داریم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=5 \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1 \end{cases}$$

از طرفی برای محاسبه‌ی مقدار عبارت داده‌شده، کار را با مخرج مشترک‌گیری شروع کرده و...

$$A=\frac{1}{(3\alpha-2)^2}+\frac{1}{(3\beta-2)^2}=\frac{(3\beta-2)^2+(3\alpha-2)^2}{((3\alpha-2)(3\beta-2))^2}$$

با توجه به برابری $A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$ داریم:

$$A=\frac{9\beta^2-12\beta+4+9\alpha^2-12\alpha+4}{(9\alpha\beta-6\alpha-6\beta+4)^2}$$

$$=\frac{9(\beta^2+\alpha^2)-12(\beta+\alpha)+8}{(9p-6s+4)^2}=\frac{9(s^2-2p)-12s+8}{(9p-6s+4)^2}$$

$$\xrightarrow[P=1]{S=5} \frac{9(25-2)-12(5)+8}{(9-6(5)+4)^2}=\frac{207-60+8}{(-17)^2}=\frac{155}{289}$$

۵۵۰. گزینه ۲ می‌دانیم اگر $S=\alpha+\beta$ مجموع و $P=\alpha\beta$ حاصل‌ضرب ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دوم باشند، آن معادله به‌صورت $x^2-Sx+P=0$ خواهد بود. در اینجا داریم:

$$\begin{cases} \alpha=(\sqrt{3}-1)^4 \\ \beta=(\sqrt{3}+1)^4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P=\alpha\beta=(\sqrt{3}-1)^4(\sqrt{3}+1)^4=((\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1))^4 \\ \quad =(3-1)^4=2^4=16 \quad \text{(حذف گزینه‌های «۳» و «۴»)} \\ S=\alpha+\beta=(\sqrt{3}-1)^4+(\sqrt{3}+1)^4>0 \quad \text{(حذف گزینه‌ی «۱»)} \end{cases}$$

زیرا مجموع دو ریشه برابر ۵۶- است.

اما اگر دنبال مقدار دقیق $S=(\sqrt{3}-1)^4+(\sqrt{3}+1)^4$ هستید، کافی است با فرض $x_1=\sqrt{3}-1$ و $x_2=\sqrt{3}+1$، حاصل $S=x_1^4+x_2^4$ را به‌صورت زیر محاسبه کنید:

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{3}-1 \\ x_2=\sqrt{3}+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2\sqrt{3} \\ x_1x_2=3-1=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S=x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2$$
$$=((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2$$
$$=((2\sqrt{3})^2-2(2))^2-2(2)^2=(12-4)^2-8=64-8=56$$

۵۵۱. گزینه ۱

راهبرد: برای رسم نمودار تابع درجه‌ی دوم (یا همان سهمی) $y=ax^2+bx+c$، تشخیص علامت ضرایب a، b و c و نیز مختصات رأس سهمی (به‌خصوص طول رأس) اهمیت بسزایی دارد. به‌طوری‌که...

(۱) اگر $a>0$، دهانه‌ی سهمی رو به بالا و اگر $a<0$، دهانه‌ی سهمی رو به پایین است.

(۲) در محل تلاقی نمودار با محور yها، اگر خط مماس بر نمودار به‌صورت (/) باشد، $b>0$ و اگر به‌صورت (\) باشد، $b<0$ است و اگر خط مماس افقی (ـ) باشد، $b=0$ خواهد بود.

(۳) علامت عدد ثابت c نیز به معنای محل تلاقی نمودار با محور y هاست. اگر نمودار، محور y ها را در بالای مبدأ قطع کند، $c>0$ و اگر در پایین مبدأ قطع کند، $c<0$ است. واضح است که اگر نمودار محور y ها را در مبدأ قطع کند، $c=0$ است.

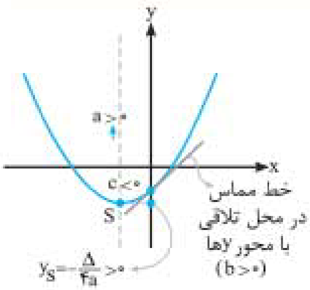
در این تست با توجه به شکل داریم:

(۱) دهانه‌ی سهمی رو به بالا است (یعنی $a>0$).

(۲) خط مماس در محل تلاقی نمودار با محور y ها به‌صورت صعودی (/) است (یعنی $b>0$).

(۳) نمودار، محور y ها را در پایین مبدأ قطع کرده است (یعنی $c<0$).

با توجه به (۲) و (۳) مقدار bc منفی است.



زرنگی: اگر $b=0$ باشد (جمع ریشه‌ها صفر می‌شود) پس $x_S=0$؛ که طبق شکل امکان ندارد! (یا دو ریشه‌ی قرینه ...)

اگر $c=0$ شود سهمی باید از مبدأ بگذرد که آن هم امکان ندارد، پس گزینه‌های «۳» و «۴» غلط هستن! برای حذف گزینه‌ی «۲»، این‌جوری فرض کن:

$$a=1, b=1, c=1 \xrightarrow{\text{در معادله}} f(x)=x^2+x+1$$

$$\xrightarrow{\text{وجود ریشه}} \Delta=1-4=-3<0 \text{ ریشه ندارد!}$$

۵۵۲. گزینه ۳ اگر α و β ($\alpha<\beta$) را ریشه‌ها یا همان محل تلاقی سهمی با محور x ها فرض کنیم، بر اساس فرض تست $\beta-\alpha=4$ بوده و نیز بر اساس آنچه پیش‌تر اشاره کردیم $x_S=\frac{\alpha+\beta}{2}$ است؛ پس:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=1 \Rightarrow \alpha+\beta=2 \xrightarrow[\text{قرار بده: }\beta=\alpha+4]{\text{با توجه به }\beta-\alpha=4} \alpha+(\alpha+4)=2$$

$$\Rightarrow 2\alpha=-2 \Rightarrow \alpha=-1 \xrightarrow{\beta=\alpha+4} \beta=3$$

بنابراین با توجه به ریشه‌های $\alpha=-1$ و $\beta=3$، معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=a(x+1)(x-3)$ قابل بیان است. برای تعیین پارامتر a کافی است مختصات رأس $S(1,1)$ را در آن صدق دهیم:

$$1=a(1+1)(1-3) \Rightarrow a=\frac{-1}{4} \Rightarrow y=\frac{-1}{4}(x+1)(x-3)$$

$$\xrightarrow[\text{پس به ساده کردن ادامه بده}]{\text{این فرم تو گزینه ها دیده نمی شه}} y=\frac{-1}{4}(x^2-2x-3)=\frac{-1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

۵۵۳. گزینه ۱ • **روش اول** رابطه‌ی $c=a+b$ بین ضرایب معادله‌ی $ax^2-bx-c=0$ به معنای این است که $x=-1$ ریشه‌ی آن است (زیرا $a(-1)^2-b(-1)-c=0 \Rightarrow a+b=c$)؛ به همین ترتیب رابطه‌ی $2b=4a-c$ به معنای این است که $x=2$ ریشه‌ی معادله است (زیرا $a(2)^2-b(2)-c=0 \Rightarrow 4a-c=2b$). بنابراین $x=-1$ و $x=2$ ریشه‌های معادله هستند و داریم:

$$\text{مجموع توان سوم ریشه‌های معادله}=(-1)^3+(2)^3=-1+8=7$$

روش دوم:

$$\begin{cases} c=a+b \\ 2b=4a-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a+b \\ c=4a-2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=4a-2b \Rightarrow 3a=3b \Rightarrow a=b$$

بنابراین $c=2a$: پس معادله برابر است با:

$$ax^2-bx-c=0 \Rightarrow ax^2-ax-2a=0 \xrightarrow{\div a} x^2-x-2=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0 \Rightarrow x=2 \ , \ x=-1$$

بنابراین مجموع توان سوم ریشه‌های معادله، برابر ۷ است.

زرنگی: این‌جوری فرض کن:

$$\left.\begin{array}{l} c=a+b \\ 2b=4a-c \end{array}\right\} \Rightarrow a=1, b=1, c=2$$

یعنی سه عددی که شرایط تست را دارند؛ خب:

$$\text{معادله}: x^2-x-2=0 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3=S^3-3SP=(1)^3-3(1)(-2)=7$$

۵۵۴. گزینه ۲

$$mx-3\sqrt{x}+m-2=0 \xrightarrow{t=\sqrt{x}\geq 0} mt^2-3t+m-2=0$$

با انتخاب $t=\sqrt{x}$ و چون $\sqrt{x}$ همواره نامنفی است، برای این‌که معادله‌ی اصلی دارای یک جواب باشد، باید معادله‌ی $mt^2-3t+m-2=0$ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد.

شرط دو ریشه‌ی مختلف العلامت:

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{m-2}{m}<0 \Rightarrow 0<m<2$$

توجه: اگر $\Delta=0$ و $\frac{-b}{a}>0$ باشد، در این‌صورت معادله یک ریشه دارد که در گزینه‌ها منظور نشده است.

$$\begin{cases} \Delta=0 \Rightarrow 9-4m(m-2)=0 \Rightarrow 4m^2-8m-9=0 \\ \quad \Rightarrow m=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{208}}{2\times 4}=\frac{8\pm 4\sqrt{13}}{8} \\ \quad \Rightarrow m=1\pm\frac{\sqrt{13}}{2} \quad (1) \\ \frac{-b}{a}=\frac{3}{m}>0 \Rightarrow m>0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} m=1+\frac{\sqrt{13}}{2}$$

بنابراین پاسخ درست به صورت $m\in(0,2)\cup\{1+\frac{\sqrt{13}}{2}\}$ است.

۵۵۵. گزینه ۱ نمودار تابع داده‌شده یک سهمی است و می‌دانیم که هر سهمی نسبت به محور تقارن خود (یعنی خط $x_S=\frac{-b}{2a}$) قرینه است.

بنابراین ابتدا رابطه‌ی داده‌شده بین صفرهای تابع را به یک رابطه‌ی سرراست‌تر تبدیل می‌کنیم؛ سپس محورهای تقارن نمودار تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=56$$

$$\xrightarrow{\text{اتحادها رو باز کن}} (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)+(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)$$

$$=2\alpha^2+2\beta^2=2(\alpha^2+\beta^2)=56 \xrightarrow{\div 2} \alpha^2+\beta^2=28$$

$$\Rightarrow S^2-2P=28 \xrightarrow[P=-3b^2]{S=b} b^2+6b^2=28 \Rightarrow 7b^2=28$$

$$\xrightarrow{\div 7} b^2=4 \xrightarrow{\text{جذر}} b=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ \text{یا} \\ b=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=2: f(x)=x^2-2x-12 \xrightarrow[\text{تقارن}]{\text{محور}} x_S=\frac{-(-2)}{2(1)}=1 \\ \text{یا} \\ b=-2: f(x)=x^2+2x-12 \xrightarrow[\text{تقارن}]{\text{محور}} x_S=\frac{-(2)}{2(1)}=-1 \end{cases}$$

۵۵۶. گزینه ۳ باید دلتای معادله بزرگ‌تر از صفر باشد:

$$\Delta=b^2-4ac=6^2-4(2m-1)(m-2)>0$$

$$\xrightarrow{\div(-4)} -9+(2m-1)(m-2)<0$$

$$\Rightarrow -9+2m^2-4m-m+2<0 \Rightarrow \underbrace{2m^2-5m-7}_{a+c=b}<0$$

$$\xrightarrow{m=-1,\frac{7}{2}} -1<m<\frac{7}{2}=3/5 \Rightarrow -1<m<3/5$$

۵۵۷. گزینه ۲ با انتخاب $x^2+x=t$ داریم:

$$t^2-32t+240=0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (t-20)(t-12)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=20 \Rightarrow x^2+x=20 \Rightarrow x^2+x-20=0 \\ t=12 \Rightarrow x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \end{cases}$$

در هر دو معادله‌ی درجه‌ی دوم، $\frac{c}{a}<0$ بوده و هر دو معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارند؛ پس:

$$\begin{cases} x^2+x-20=0 \xrightarrow{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}} P_1=\frac{c}{a}=-20 \\ x^2+x-12=0 \xrightarrow{\text{حاصل ضرب ریشه‌ها}} P_2=\frac{c}{a}=-12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب کل ریشه‌ها}=(-20)(-12)=240$$

۵۵۸. گزینه ۲ می‌دانیم که در سهمی به معادله‌ی $y=a(x-h)^2+k$، مختصات رأس سهمی، $S(h,k)$ است. در شکل داده‌شده مختصات رأس به‌صورت $S(1,-2)$ است؛ در نتیجه:

$$h=1, k=-2 \Rightarrow y=a(x-1)^2-2$$

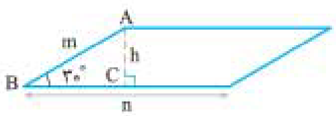
از طرفی نقطه‌ای به مختصات $(-1,0)$ روی سهمی قرار دارد:

$$0=a(-1-1)^2-2 \Rightarrow 4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y=\frac{1}{2}(x-1)^2-2}_{\text{این فرم تو گزینه ها نیست!}} \xrightarrow{\text{اتحاد رو باز کن}} y=\frac{1}{2}(x^2-2x+1)-2$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2} \checkmark$$

۵۵۹. گزینه ۳ با توجه به شکل رسم‌شده، $m+n=11$ و مساحت متوازی‌الاضلاع برابر $S=nh$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:



$$\sin 30^\circ = \frac{h}{m} \xrightarrow{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} h = \frac{1}{2}m$$

$$S = nh = n(\frac{1}{2}m) \Rightarrow S = \frac{1}{2}mn \xrightarrow[\text{قرار بده: } n=11-m]{\text{از شرط } m+n=11}$$

$$S = \frac{1}{2}m(11-m) = \frac{11m}{2} - \frac{1}{2}m^2 \xrightarrow{\text{مرتب کن}} S = \frac{-1}{2}m^2 + \frac{11}{2}m$$

نمودار تابع مساحت متوازی‌الاضلاع، معادله‌ی یک سهمی است و زمانی بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند که $m = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{11}{2}}{2(\frac{-1}{2})} = \frac{11}{2}$ باشد؛ پس:

$$S_{max} = S(\frac{11}{2}) = \frac{-1}{2}(\frac{121}{4}) + \frac{11}{2}(\frac{11}{2}) = \frac{-1}{8}(121) + \frac{1}{4}(121) = \frac{1}{8} \times 121$$

زرنگی: هرگاه مجموع دو عدد مثبت مقداری ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها موقعی ماکزیمم است که آن عبارت‌ها سهم یکسانی از جمع داشته باشند؛ بنابراین:

$$S = mn\sin\theta \xrightarrow{\theta = 30^\circ} S = mn \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}mn \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی}} a + b = 11 \xrightarrow{\text{طبق مطالب گفته‌شده}} a = b = \frac{11}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} \max(S) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{2} \times \frac{11}{2} = \frac{121}{8}$$

۵۶۰. گزینه ۴ طول طناب به‌کار رفته برای محصورکردن این سطح برابر است با:

$$y + x + x + \text{محیط نیم دایره} = 70 \Rightarrow y + 2x + \frac{2\pi x}{2} = 70$$

$$\xrightarrow{\pi \simeq 3} y + 2x + 3x = 70 \Rightarrow y + 5x = 70 \Rightarrow y = 70 - 5x \quad (*)$$

از طرفی مساحت ایجادشده برابر است با:

$$S = \underbrace{xy}_{\text{برای مستطیل}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\pi x^2)}_{\text{برای نیم‌دایره}} \xrightarrow{(\pi \simeq 3)} S = xy + \frac{3}{2}x^2$$

$$\xrightarrow{(*)} S = x(70 - 5x) + \frac{3}{2}x^2 = 70x - 5x^2 + \frac{3}{2}x^2 = -\frac{7}{2}x^2 + 70x$$

حالا برای این‌که به بیشترین مقدار ممکن برای تابع مساحت (که نمودار آن یک سهمی است) برسیم، باید مقدار x را برابر $x = \frac{-b}{2a}$ انتخاب کنیم:

$$S = -\frac{7}{2}x^2 + 70x \Rightarrow x = \frac{-70}{2(\frac{-7}{2})} = 10\,m$$

$$\Rightarrow S = \frac{-7}{2}(100) + 70(10) = 350\,m^2$$

۵۶۱. گزینه ۴ اگر α و β ریشه‌های این معادله باشند، طبق فرض داریم:

$$ax^2 - x + a = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S}{P} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P = 4S \xrightarrow{P=1,\ S=\frac{1}{a}} 1 = 4 \times \frac{1}{a} \Rightarrow a = 4$$

اما به ازای $a = 4$، دلتای معادله منفی بوده و معادله فاقد ریشه است:

$$\Delta = 1 - 4a^2 \xrightarrow{a=4} \Delta = 1 - 16 < 0$$

بنابراین هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۵۶۲. گزینه ۱ با فرض $\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$ و $\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2-1}}$ به‌عنوان ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - bx + 3 = 0$ می‌توان نوشت:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-b)}{1} = b \ , \ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{r^2+1}{r^2} = 1 + \frac{1}{r^2} \\ \frac{1}{\beta^2} = \frac{r^2-1}{r^2} = 1 - \frac{1}{r^2} \end{cases} \xrightarrow{(+)} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = 2 \Rightarrow \frac{b^2 - 2(3)}{(3)^2} = 2$$

$$\Rightarrow b^2 = 18 + 6 = 24 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{6}$$

۵۶۳. گزینه ۴ اگر ریشه‌ی بزرگ‌تر را α و ریشه‌ی کوچک‌تر را β بنامیم و فرض کنیم که α، k واحد از β بیشتر است، آن‌گاه $\alpha = \beta + k$ یا $\alpha - \beta = k$؛ یعنی برای یافتن k باید تفاضل دو ریشه را بیابیم. از طرفی یک راه برای یافتن تفاضل دو ریشه، استفاده از دستور $\alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است؛ بنابراین:

$$\underbrace{(\sqrt{2}+1)}_{a}x^2 \underbrace{-\sqrt{5}}_{b}x + \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{c} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-\sqrt{5})^2 - 4(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 5 - 4(1) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1}}{|\sqrt{2}+1|} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\xrightarrow{\text{گویا کن}} \frac{1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \alpha = \beta + (\sqrt{2}-1)$$

در نتیجه ریشه‌ی α از ریشه‌ی β به اندازه‌ی $\sqrt{2} - 1$ واحد بیشتر است.

۵۶۴. گزینه ۱ ابتدا از روی ضرایب معادله‌ی داده‌شده مقادیر S و P آن را به‌دست می‌آوریم:

$$ax^2 + bx - c = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, P = \alpha\beta = \frac{-c}{a}$$

حالا با توجه به این مقادیر و نیز ریشه‌های معادله‌ی مطلوب یعنی $\frac{-1}{\alpha}$ و $\frac{-1}{\beta}$، S' و P' معادله‌ی خواسته‌شده را یافته و از دستور $x^2 - S'x + P' = 0$ کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} S' = \frac{-1}{\alpha} + \frac{-1}{\beta} = \frac{-\beta - \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{-(\frac{-b}{a})}{\frac{-c}{a}} = -\frac{b}{c} \\ P' = (\frac{-1}{\alpha})(\frac{-1}{\beta}) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{-c}{a}} = -\frac{a}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{c}x - \frac{a}{c} = 0 \xrightarrow[(c \neq 0)]{\times c} cx^2 + bx - a = 0$$

۵۶۵. گزینه ۴ شرط وجود دو ریشه‌ی متمایز مثبت در معادله‌ی درجه‌ی دوم عبارت است از: $\Delta > 0$ (1)، $S > 0$ (2)، $P > 0$ (3)

اما در اینجا داریم:

$$x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2(a-2) \\ C = 14 - a \end{cases}$$

(1) $\Delta = B^2 - 4AC = 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0$

$$\xrightarrow[\text{ساده کن}]{\div 4} a^2 - 4a + 4 - 14 + a > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$$

$$\Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} \begin{cases} a < -2 \\ \text{یا} \\ a > 5 \end{cases}$$

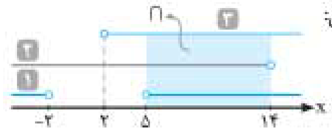
② $P=\frac{C}{A}=\frac{14-a}{1}>0\Rightarrow 14-a>0\Rightarrow a<14$

③ $S>0\Rightarrow S=\frac{-B}{A}=2(a-2)>0\Rightarrow a-2>0\Rightarrow a>2$

و جواب تست از اشتراک هر سه نامعادله به‌دست می‌آید، یعنی:

$$\xrightarrow{①\cap②\cap③} 5<a<14$$

روی محور هم ببین:



زرنگی:

حذف گزینه‌های «۲» و «۳» $a=3\xrightarrow{\text{درمعادله}} x^2-2x+11=0 \xrightarrow[\text{ریشه‌ندارد}]{\Delta=(4-44)<0}$

حذف گزینه‌ی «۱» $a=0\xrightarrow{\text{درمعادله}} x^2+4x+14=0\xrightarrow[\text{ریشه‌ندارد}]{\Delta=(16-56)<0}$

۵۶۶. گزینه ۲ • روش اول: با توجه به اطلاعات داده‌شده متوجه می‌شویم که ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو $3x^2+bx+c=0$ برابر -3 و 5 هستند پس با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌ها داریم:

$$\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}\Rightarrow -3+5=\frac{-b}{3}\Rightarrow b=-6\\ P=x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow (-3)(5)=\frac{c}{3}\Rightarrow c=-45\end{cases}$$

پس معادله‌ی سهمی به‌صورت $y=3x^2-6x-45$ بوده و می‌دانیم که کمترین مقدار این تابع همان عرض رأس سهمی است، پس:

$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-6)}{2\times3}=1\Rightarrow y_S=f(1)=3(1)^2-6\times1-45=-48$$

روش دوم: می‌دانیم که اگر x_1 و x_2 صفرهای سهمی $y=ax^2+bx+c$ باشند، می‌توان سهمی را به‌صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ نیز در نظر گرفت، پس در این تست معادله‌ی سهمی داده‌شده را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=3x^2+bx+c=3(x-(-3))(x-5)=3(x^2-2x-15)=3x^2-6x-45$$

$$\Rightarrow \min=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(-6)^2-4(3)(-45)}{4\times3}=-\frac{4\times3(3+45)}{4\times3}=-48$$

۵۶۷. گزینه ۲ با توجه به فرضیات تست، شکل سهمی می‌بایست به‌صورت مقابل باشد:

$$\xrightarrow{\text{شرط را بنویس}}\begin{cases}a>0\Rightarrow 2m+3>0\Rightarrow m>-\frac{3}{2} & ①\\ \Delta<0\Rightarrow \Delta=36-4(2m+3)(m)<0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div(-4)} 2m^2+3m-9>0\Rightarrow(2m-3)(m+3)>0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}\begin{cases} m<-3\\ \text{یا}\\ m>\frac{3}{2}\end{cases}\quad ②$$

$$\xrightarrow{①\cap②} m>\frac{3}{2}$$

زرنگی:

$m=1\Rightarrow y=(2(1)+3)x^2+6x+1=5x^2+6x+1$

$\xrightarrow{\Delta>0}$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز و بین دو ریشه، منفی

$\Rightarrow$ حذف گزینه‌های «۳» و «۴» که شامل ۱ هستند.

$m=-1\Rightarrow y=(2(-1)+3)x^2+6x-1=x^2+6x-1$

$\xrightarrow{\Delta>0}$ حذف گزینه‌ی «۱» که شامل -1 است

۵۶۸. گزینه ۲ می‌دانیم که در سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است، پس در این تست داریم:

$$y=x^2+bx+8\Rightarrow -\frac{b}{2a}=\frac{-b}{2\times1}=3\Rightarrow b=-6\Rightarrow y=x^2-6x+8$$

$$\xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور xها}} x^2-6x+8=0\Rightarrow (x-4)(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\x_2=4\end{cases}$$

که فقط $x=2$ در گزینه‌ها آمده است.

۵۶۹. گزینه ۱

$$-x^2+8x-1=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=8\\P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1\end{cases}\Rightarrow\alpha,\beta>0$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\frac{\sqrt\alpha}{\sqrt\beta}+\frac{\sqrt\beta}{\sqrt\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{8}{\sqrt1}=8$$

۵۷۰. گزینه ۴ در معادله‌ی $x^2+x-5=0$ داریم:

$$\begin{cases}s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-1\\p=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-5\end{cases}\quad ✱$$

اگر S و P به‌ترتیب جمع و ضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید باشند، آن‌گاه:

$$S=(\frac{\alpha}{\beta}-1)+(\frac{\beta}{\alpha}-1)$$

$$=\underbrace{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}}_{✱✱}-2=\frac{s^2-2p}{p}-2\overset{✱}{=}\frac{(-1)^2-2(-5)}{-5}-2=-\frac{11}{5}-2=\frac{-21}{5}$$

$$P=(\frac{\alpha}{\beta}-1)(\frac{\beta}{\alpha}-1)=1-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}+1=2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\overset{✱✱}{=}\frac{21}{5}$$

حال معادله‌ی جدید را می‌نویسیم:

$$x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2-(-\frac{21}{5})x+\frac{21}{5}=0\Rightarrow 5x^2+21x+21=0$$

۵۷۱. گزینه ۲ ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم؛ سپس تعداد جواب‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{3}{x^2}-12=0\Rightarrow\frac{3-12x^2}{x^2}=0\xrightarrow[\text{صفر بذار}]{\text{صورت رو مساوی}}3-12x^2=0$$

$$\xrightarrow{\text{حل کن}}3=12x^2\xrightarrow{\div12}x^2=\frac{1}{4}\xrightarrow{\text{جذر بگیر}}x=\pm\frac{1}{2}$$

$\xrightarrow{\text{چک کردن در مخرج}}$ مخرج را صفر نمی‌کند $\xrightarrow{\text{تعداد جواب‌ها}}$ دوتا

۵۷۲. گزینه ۱

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{12}{\underbrace{9-x^2}_{-(x^2-9)}}\xrightarrow{\text{همه رو بیار سمت چپ}}\frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}+\frac{12}{\underbrace{x^2-9}_{(x-3)(x+3)}}=0$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک بگیر}}\frac{3(x^2-9)-2x(x+3)+12x}{x(x-3)(x+3)}=0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}}\frac{3x^2-27-2x^2-6x+12x}{x(x-3)(x+3)}=0$$

$$\Rightarrow\frac{x^2+6x-27}{x(x-3)(x+3)}=0\xrightarrow[\text{صفر بذار}]{\text{صورت رو مساوی}}x^2+6x-27=0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}}(x+9)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+9=0\Rightarrow x=-9\xrightarrow{\text{چک کردن در مخرج}}\text{مخرج را صفر نمی‌کند}\ ✓\\ x-3=0\Rightarrow x=3\xrightarrow{\text{چک کردن در مخرج}}\text{مخرج را صفر می‌کند}\ ✗\end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی موردنظر فقط یک جواب دارد.