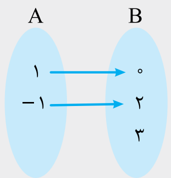
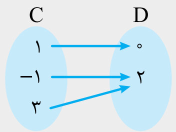
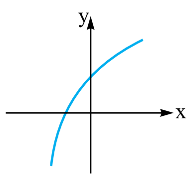
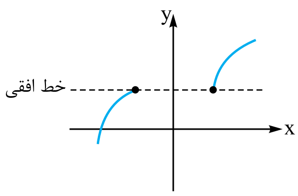
فهرست

درس نهم تابع یک‌به‌یک

تابع f وقتی یک‌به‌یک است که برای هر x از دامنه، یک y منحصربه‌فرد داشته باشد. پس باید خروجی‌ها تکراری نباشند. مثلاً تابعی که به هر کس کد ملی او را نسبت می‌دهد یک‌به‌یک است؛ چون کد ملی هیچ دو نفری مثل هم نیست. اما تابعی که به هر کس نام کوچک پدر او را نسبت می‌دهد یک‌به‌یک نیست؛ چون نام پدر خیلی‌ها یکسان است. در جدول زیر نمایش زوج مرتبی، پیکانی و نموداری توابع یک‌به‌یک را می‌بینیم:

انواع نمایش تابع	توضیحات	مثال
نمایش زوج مرتبی	در تمام زوج‌های مرتب، مؤلفه‌های دوم متمایز باشند. اگر دوتا زوج مرتب با y یکسان دیدیم، باید xهای آن‌ها هم یکی باشند. یعنی: $y_۱ = y_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲$	یک‌به‌یک است. $\{(۱,۳),(۲,۵),(۳,۸)\}$ یک‌به‌یک نیست. $\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۲),(۴,۶)\}$
نمایش پیکانی	باید به هر عضو از مجموعهٔ دوم، حداکثر یک فلش وارد شود. تعداد اعضای دامنه = تعداد اعضای برد	 یک‌به‌یک است.  یک‌به‌یک نیست. (دو فلش به عدد ۲ وارد شده است.)
نمایش نموداری	هیچ خط افقی نمودار را در ۲ نقطه یا بیشتر قطع نکند.	 یک‌به‌یک است.  یک‌به‌یک نیست.

مثل بخش تابع‌بودن، در این‌جا هم ممکن است بعضی از زوج‌های مرتب، پارامتر داشته باشند و باید شرط تابع و یک‌به‌یک‌بودن، مقادیر مجهول‌ها را پیدا کنیم. ببینید:

تست | اگر $f = \{(۱,۲),(-۲,۱),(b,۱),(a,b),(a^۲-۳,۲)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ±۱ ۴) نشدنی

پاسخ ۲ | اول هم $(۱,۲)$ و هم $(a^۲-۳,۲)$ را می‌بینیم، پس باید داشته باشیم $a^۲-۳=۱$ که از آن نتیجه می‌شود $a^۲=۴$ یا $a=\pm۲$.

حالا به $(-۲,۱)$ و $(b,۱)$ دقت می‌کنیم و در نتیجه b می‌شود -۲.

اما نگران زوج مرتب (a,b) هستیم! چون اگر $a=-۲$ باشد، تابع‌بودن را خراب می‌کند (هم $(-۲,-۲)$ و هم $(-۲,۱)$ داریم). پس فقط $a=۲$ قابل قبول است. تابع را به ازای $a=۲$ و $b=-۲$ ببینید:

$$f = \{\underbrace{(۱,۲)},\underbrace{(-۲,۱),(-۲,۱)}_{\text{تکراری}},(۲,-۲),\underbrace{(۱,۲)}\} \xrightarrow[b=-۲]{a=۲}$$

تکراری

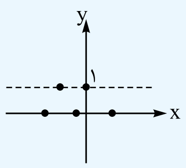
خب خوب شد! f مشکلی ندارد و تابعی یک‌به‌یک و ۳ عضوی است.

پس $\frac{a}{b} = \frac{۲}{-۲} = -۱$.

پرسش مهم کتاب درسی

در تابع‌هایی که نمودارشان از نقاط مجزا تشکیل شده است، ممکن است سؤال بپرسد با حذف حداقل چند نقطه، به صورت یک‌به‌یک درمی‌آید. تست را ببینید:

تست | شکل روبه‌رو نمودار تابع f است. با حذف حداقل .... نقطه از این نمودار می‌توان به تعداد ....، تابع یک‌به‌یک ساخت.



۱) ۲، ۳ ۲) ۲، ۶

۳) ۳، ۶ ۴) ۳، ۳

پاسخ ۳ الان f یک‌به‌یک نیست؛ دوتا مشکل داریم: اولاً خط افقی $y=\circ$ (همان محور xها) نمودار را ۳ بار قطع کرده است و باید حداکثر یک بار قطع کند. پس باید حداقل ۲تا از نقطه‌های روی محور x حذف شوند. ثانیاً خط افقی $y=۱$ نمودار را در دو نقطه قطع کرده است که باید حداقل یکی از آن‌ها را حذف کرد. پس روی هم حداقل ۳ نقطه باید حذف کرد تا تابعی یک‌به‌یک ساخته شود.

حالا اگر گفتید با حذف ۳ نقطه، چند تابع یک‌به‌یک مختلف می‌شود ساخت؟ جواب $۶=\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۲}$ است.

انتخاب ۱ نقطه از روی خط $y=۱$ — انتخاب ۲ نقطه از روی خط $y=\circ$

نمایش ضابطه‌ای

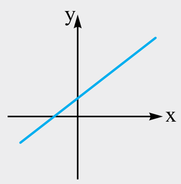
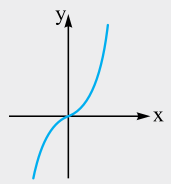
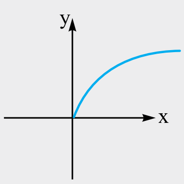
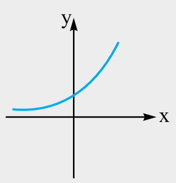
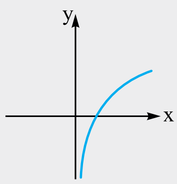
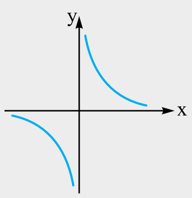
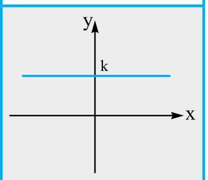
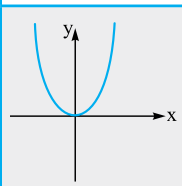
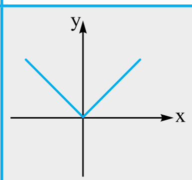
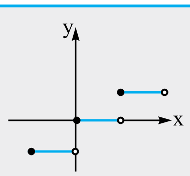
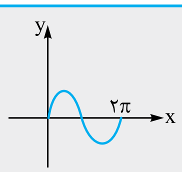
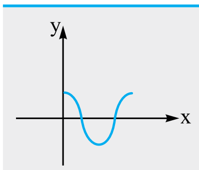
اگر ضابطهٔ تابع را داشته باشیم و نخواهیم از شکل استفاده کنیم، معمولاً دنبال دوتا x می‌گردیم که y یکسان داشته باشند و مثال نقض می‌آوریم. **مثلاً** $y=x+\frac{۱}{x}$ یک‌به‌یک نیست. چون هم $x=۲$ و هم $x=\frac{۱}{۲}$ را به $y=۲/۵$ نظیر می‌کند.

اشاره به زبان ریاضی اگر بخواهیم یک‌به‌یک‌بودن تابع را نشان بدهیم باید از $y_۱=y_۲$ به $x_۲=x_۱$ برسیم. مثلاً الان ثابت می‌کنیم $f(x)=\frac{۲x-۱}{x-۲}$ یک‌به‌یک است.

$$y_۱=y_۲ \Rightarrow \frac{۲x_۱-۱}{x_۱-۲}=\frac{۲x_۲-۱}{x_۲-۲} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۲x_۱x_۲-۴x_۱-x_۲+۲=۲x_۲x_۱-۴x_۲-x_۱+۲$$

$$\Rightarrow ۳x_۲=۳x_۱ \Rightarrow x_۱=x_۲$$

توابع معروف یک‌به‌یک و غیر یک‌به‌یک

	خطی	درجه ۳ با شکل	رادیکالی	نمایی	لگاریتمی	هموگرافیک
یک‌به‌یک‌ها	 $y=ax+b\,;\,a\neq\circ$	 $y=x^۳$	 $y=\sqrt{x}$	 $y=a^x$	 $y=\log x$	 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$
	ثابت	**درجه‌زوج**	**قدرمطلقی**	**براکتی**	**سینوسی**	**کسینوسی**
غیریک‌به‌یک‌ها	 $y=k$	 $y=x^۲$	 $y=\|x\|$	 $y=[x]$	 $y=\sin x$	 $y=\cos x$

تست ۲ در میان توابع با ضابطه‌های $y=x^۳-x^۴$ ، $y=x(x-۲)$ ، $y=۳x-۱$ و $y=\frac{۲x+۴}{x+۲}$ چند تابع یک‌به‌یک وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

پاسخ ۲ فقط $y=۳x-۱$ یک‌به‌یک است.

(الف) $y=x^۳-x^۴$ چندجمله‌ای درجه‌چهارم است و یک‌به‌یک نیست. (البته با نگاهی ساده معلوم است که به ازای $x=\circ$ و $x=۱$، جواب y صفر می‌شود، پس یک‌به‌یک نیست.)

(ب) $y=x(x-۲)$ یک سهمی است و یک‌به‌یک نیست (در این‌جا هم معلوم است که $f(\circ)=f(۲)=\circ$).

(پ) $y=۳x-۱$ خطی و یک‌به‌یک است.

(ت) $y=\frac{۲x+۴}{x+۲}$ ساده می‌شود و به صورت $y=۲\,;\,(x\neq-۲)$ درمی‌آید که یک‌به‌یک نیست. پس فقط یک تابع یک‌به‌یک وجود داشت.

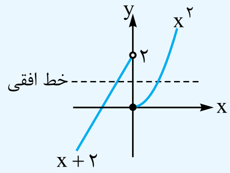
بررسی یک‌به‌یک بودن توابع چندضابطه‌ای، قدرمطلق و براکتی

در تابع‌های قدرمطلقی، براکتی و چندضابطه‌ای، معمولاً با رسم شکل، می‌توانیم یک‌به‌یک‌بودن را تشخیص دهیم.

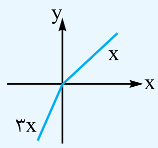
تست کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $\begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x+2 & x < 0 \end{cases}$ ۲) $y = 2x - |x|$ ۳) $y = x - |2x|$ ۴) $y = x - [x]$

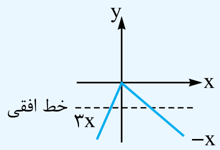
پاسخ ۲ نمودارها را می‌کشیم:

۱)


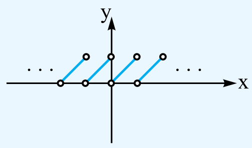
یک‌به‌یک نیست.

۲)


$y = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ یک‌به‌یک است.

۳)


$y = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$ یک‌به‌یک نیست.

۴)


$y = x - [x]$ یک‌به‌یک نیست.

در تابع‌های چندضابطه‌ای، بعضی اوقات تست از ما می‌خواهد تابع را به صورت یک‌به‌یک درآوریم.

رابطهٔ یکنوایی و یک‌به‌یک بودن تابع

گفتیم تأیید یک‌به‌یک‌بودن تابع از روی ضابطه، کار راحتی نیست. حالا یک راه خوب پیشنهاد می‌کنیم. اگر بتوانیم نشان دهیم که f اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است، کار تمام است و f یک‌به‌یک است. پس به خاطر می‌سپاریم که هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است. مثلاً $x^3 + \sqrt{x}$ و $2^x + x$ همگی یک‌به‌یک هستند چون اکیداً صعودی‌اند و از طرف دیگر $-x^3 - x$ و $\sqrt{-x}$، اکیداً نزولی‌اند پس یک‌به‌یک هستند.

تست کدام تابع یک‌به‌یک <u>نیست</u>؟

۱) $x + [x]$ ۲) $|x+3| + \sqrt{x}$ ۳) $x - \sqrt{-x}$ ۴) $\sqrt{x^2 + x + 1}$

پاسخ ۴ در ۱، $x + [x]$، جمع تابع اکیداً صعودی x و تابع صعودی $[x]$ است، پس اکیداً صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک است.

در ۲، به خاطر $\sqrt{x}$ همواره $x \geq 0$ است، پس $|x+3|$ همان $x+3$ می‌شود و جمع دو تابع اکیداً صعودی را داریم که صعودی اکید و یک‌به‌یک است.

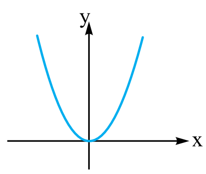
در ۳ تابع $\sqrt{-x}$ اکیداً نزولی است پس $-\sqrt{-x}$ اکیداً صعودی و جمع آن با x، اکیداً صعودی است. پس این هم یک‌به‌یک است.

اما در ۴، برای این‌که ثابت کنیم $\sqrt{x^2 + x + 1}$ یک‌به‌یک نیست، مثال نقض می‌آوریم: به ازای $x = 0$ مقدار تابع برابر ۱ می‌شود، از طرفی به ازای $x = -1$ نیز مقدار تابع برابر ۱ است.

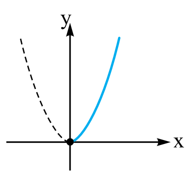
محدودکردن دامنه و ساختن تابع یک‌به‌یک

در تابع‌های غیریک‌به‌یک مثل $y = x^2$ یا $y = |x|$ یا $y = \sin x$ به جای در نظر گرفتن کل دامنه، آن را محدود می‌کنیم تا تابع یک‌به‌یک ساخته شود.

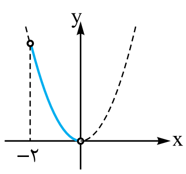
مثلاً $y = x^2$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست اما با دامنهٔ $(-2,0)$ یا $(1,2)$ و یا $[0,+\infty)$ یک‌به‌یک است. ببینید:



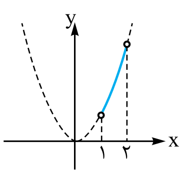
با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک نیست



با دامنهٔ $[0,+\infty)$ یک‌به‌یک است



با دامنهٔ $(-2,0)$ یک‌به‌یک است



با دامنهٔ $(1,2)$ یک‌به‌یک است

با دیدن نمودارهای بالا یک نتیجه‌گیری مهم می‌کنیم:

نکته سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$، در قسمت‌هایی از دامنه که شامل رأس آن باشد، یک‌به‌یک نیست. (البته اگر رأس سهمی در ابتدا یا انتهای بازه قرار داشته باشد، سهمی در آن بازه یک‌به‌یک است.)

تست به ازای کدام مقادیر a، تابع $f(x)=x^{۲}+ax$ در فاصلهٔ $(-۲,۳)$ یک‌به‌یک است؟

۱) $[۴,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۶]$ ۳) $[-۶,۴]$ ۴) $(-\infty,-۶]\cup[۴,+\infty)$

پاسخ ۴ سهمی در بازه‌هایی که شامل رأس آن باشد یک‌به‌یک نیست. بنابراین باید a را به گونه‌ای انتخاب کنیم که رأس سهمی خارج از بازهٔ $(-۲,۳)$ باشد. طول رأس سهمی برابر است با $x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-a}{۲}$ پس:

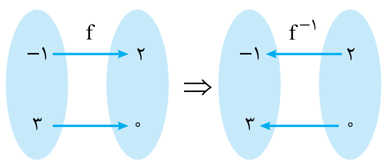
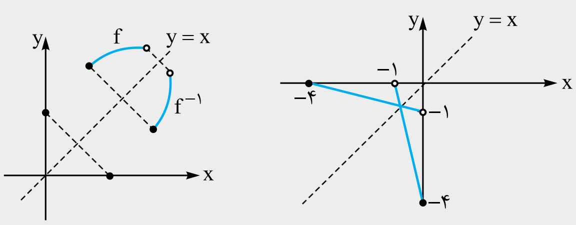
$-\frac{a}{۲}\geq ۳ \Rightarrow a\leq -۶$ یا $\frac{-a}{۲}\leq -۲ \Rightarrow a\geq ۴$

بنابراین اگر a عضو $(-\infty,-۶]\cup[۴+\infty)$ باشد، تابع $f(x)$ در بازهٔ $(-۲,۳)$ یک‌به‌یک است.

درس دهم: وارون تابع و تابع وارون

وارون یک تابع

از سال یازدهم به یاد داریم که وارون تابع f را $f^{-۱}$ می‌نامیم و برای ساختن $f^{-۱}$، جای x و y را عوض می‌کنیم. این‌ها را ببینید:

بازنمایی تابع	نحوهٔ وارون‌کردن	مثال
نمودار پیکانی	جهت پیکان‌ها را عوض می‌کنیم.	
زوج‌های مرتب	جای مؤلفه‌ها را عوض می‌کنیم.	$f=\{(-۱,۲),(۳,۰)\} \Rightarrow f^{-۱}=\{(۲,-۱),(۰,۳)\}$
مقدار در یک نقطه	به جای $f(a)=b$ می‌نویسیم $f^{-۱}(b)=a$.	$f(۴)=۲ \Rightarrow f^{-۱}(۲)=۴$
نمودار مختصاتی	نمودار را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم.	
رابطهٔ بین x و y	جای x و y را عوض کنیم.	$f:\ y=x^{۳} \Rightarrow f^{-۱}:\ x=y^{۳}$ $g:\ x+۲y=۵ \Rightarrow g^{-۱}:\ y+۲x=۵$

تست اگر $f=\{(۲,-۱),(۳,۱),(۰,۲),(۱,۰)\}$ و $g=\{(۱,-۱),(۲,۰),(-۱,۳),(-۳,۴)\}$، آن‌گاه $y=(g^{-۱}+f^{-۱})(x)$ شامل کدام زوج مرتب است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(-۱,۳)$ ۴) $(-۱,۴)$

پاسخ ۳ با عوض‌کردن جای مؤلفه‌های زوج مرتب‌ها، توابع $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ را به دست می‌آوریم:

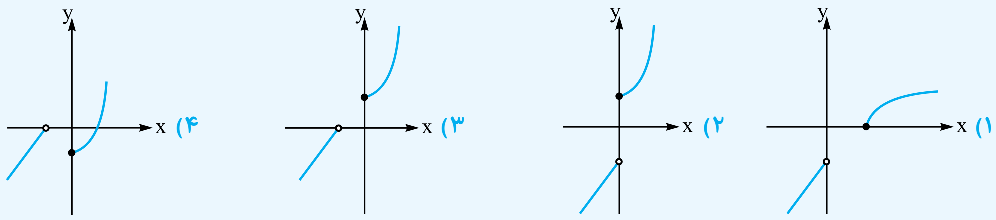
$f^{-۱}=\{(-۱,۲),(۱,۳),(۲,۰),(۰,۱)\}$ و $g^{-۱}=\{(-۱,۱),(۰,۲),(۳,-۱),(۴,-۳)\}$

برای $f^{-۱}+g^{-۱}$ سراغ مؤلفه‌های اول مشترک می‌رویم. در بین x ها، اعداد ۱− و صفر مشترک‌اند و در xهای مشترک مؤلفه‌های دوم را با هم جمع می‌کنیم:

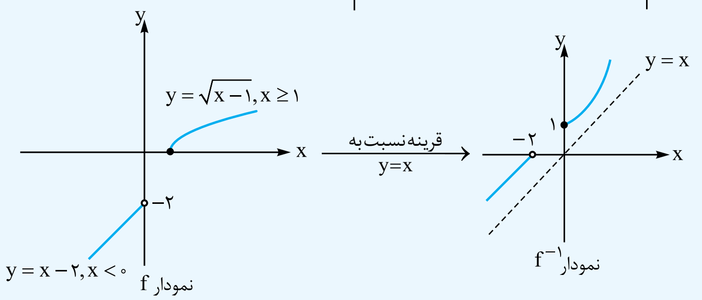
$\begin{cases}(-۱,۱)\in g^{-۱}\\(-۱,۲)\in f^{-۱}\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع y‌ها}}(-۱,۳)\in g^{-۱}+f^{-۱}$ و $\begin{cases}(۰,۲)\in g^{-۱}\\(۰,۱)\in f^{-۱}\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع y‌ها}}(۰,۳)\in g^{-۱}+f^{-۱}$

حالا تابع $f^{-۱}+g^{-۱}$ می‌شود: $g^{-۱}+f^{-۱}=\{(۰,۳),(-۱,۳)\}$

تست ؟ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱} & x\geq ۱\\ x-۲ & x<۰\end{cases}$ به کدام شکل است؟



پاسخ ۳ نمودار تابع f را رسم و نسبت به $y=x$ قرینه می‌کنیم:



اشاره نقطهٔ $(۱,۰)$ روی محور x به نقطهٔ $(۰,۱)$ روی محور y نظیر می‌شود.

تابع وارون

وارون یک تابع ممکن است تابع باشد و یا تابع نباشد. این‌ها را ببینید:

الف $f=\{(۱,۲),(-۱,۳),(۰,۲)\} \Rightarrow f^{-۱}=\{\underline{(۲,۱)},(۳,-۱),\underline{(۲,۰)}\}$

f تابع است اما $f^{-۱}$ تابع نیست چون دوتا زوج مرتب با مولفهٔ اولِ ۲ دارد. دقت کنید که چون تابع f دارای y تکراری بود، طبیعتاً $f^{-۱}$، xهای تکراری خواهد داشت.

ب $f=\{(۲,۴),(-۱,۵),(۰,۱)\} \Rightarrow f^{-۱}=\{(۴,۲),(۵,-۱),(۱,۰)\}$

f تابع است و $f^{-۱}$ نیز تابع است. از اول هم معلوم بود که چون f، y تکراری ندارد، $f^{-۱}$ هم x تکراری نخواهد داشت.

حالا بگویید در چه صورت وارون یک تابع، تابع است؟ خب باید تابع خودمان y تکراری نداشته باشد یعنی یک‌به‌یک باشد.

نکته اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، $f^{-۱}$ نیز تابع است، در این صورت می‌گوییم تابع f وارون‌پذیر است و به $f^{-۱}$ می‌گوییم تابع وارون و این‌طوری یاد بگیرید که جملات زیر معادل هم هستند.

۱) f وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) است. ۲) f یک‌به‌یک است. ۳) وارون f، تابع است. ۴) f تابع وارون دارد.

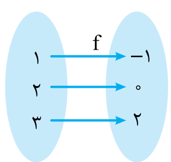
محاسبهٔ مقدار تابع وارون

برای پیداکردن $f^{-۱}(b)$ باید از خودمان بپرسیم چه عددی رابطهٔ $f(a)=b$ را برقرار می‌کند. به بیان ساده‌تر $f^{-۱}(b)$ از ما می‌پرسد به f چه عددی بدهیم تا جوابش b شود؟

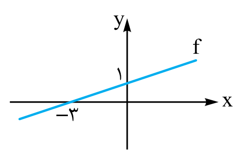
مثال در تابع‌های زیر مقدار $f^{-۱}(۲)$ را پیدا کنید.

الف $f=\{(۲,۱),(-۱,۴),(۰,۲),(۴,۱)\}$

ب



پ



ت $f(x)=۴^{x-۱}$

پاسخ **الف** در تابع f زوج مرتب $(۰,۲)$ داریم، پس در $f^{-۱}$ زوج مرتب $(۲,۰)$ وجود دارد و بنابراین $f^{-۱}(۲)=۰$. یا این‌جوری می‌گوییم که اگر عدد صفر را به f بدهیم، ۲ می‌دهد پس در $f^{-۱}$، ۲ را می‌گیرد و صفر می‌دهد.

ب تابع f عدد ۳ را به ۲ نظیر کرده پس $f^{-۱}$ عدد ۲ را به ۳ نظیر می‌کند یعنی $f^{-۱}(۲)=۳$.

(پ) تابع f خط است و از $(\circ,1)$ و $(-3,\circ)$ می‌گذرد. پس معادلهٔ آن $f(x)=\frac{1}{3}x+1$ است. حالا $f^{-1}(2)$ از ما می‌پرسد به x چه عددی بدهیم تا $f(x)$ بشود ۲؟ خُب فکر کنید ... اگر $\frac{1}{3}x+1$ بخواهد ۲ بشود باید x چند باشد؟ $\frac{1}{3}x+1=2 \Rightarrow \frac{1}{3}x=1 \Rightarrow x=3$

پس $f^{-1}(2)=3$.

(ت) $f^{-1}(2)$ یعنی چه؟ یعنی در $f(x)=4^{x-1}$ مقدار x چه‌قدر باشد تا $f(x)$ بشود ۲. پس $f(x)$ را مساوی ۲ قرار می‌دهیم:

$$4^{x-1}=2 \Rightarrow (2^2)^{x-1}=2 \Rightarrow 2^{2x-2}=2^1 \Rightarrow 2x-2=1 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{یعنی}} f^{-1}(2)=\frac{3}{2}$$

اشاره باز هم تأکید کنیم که $f^{-1}(b)$ از ما می‌خواهد $f(x)=b$ قرار دهیم و x را پیدا کنیم.

اشاره در تابع‌های دوضابطه‌ای باید حواسمان به دامنهٔ f^{-1} (یعنی برد f) باشد و دقت کنیم که کدام ضابطه را استفاده می‌کنیم:

تست اگر $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+1 & x\geq 1\\ \frac{4}{x-1} & x<1\end{cases}$، مقدار $f^{-1}(3)+f^{-1}(-1)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

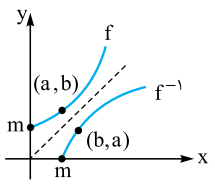
پاسخ ۱ $f^{-1}(3)$ یعنی به x چه عددی بدهیم تا حاصل f برابر ۳ شود. ضابطهٔ بالا می‌گوید $x=8$ و اتفاقاً با دامنه‌اش هم مطابقت دارد. پس $f^{-1}(3)=8$.

برای $f^{-1}(-1)$ از ضابطهٔ بالا $x=-8$ درمی‌آید که قابل قبول نیست (چون دامنهٔ این ضابطه $x\geq 1$ است)، اما از ضابطهٔ پایین، اگر $\frac{4}{x-1}$ را مساوی -1 بگذاریم $x=-3$ درمی‌آید که مناسب است. پس جواب می‌شود:

$$f^{-1}(3)+f^{-1}(-1)=8+(-3)=5$$

نکته

(۱) اگر (a,b) نقطه‌ای روی نمودار f باشد (b,a) نقطهٔ متناظر آن روی نمودار f^{-1} است.



(۲) اگر نمودار f محور xها را در m قطع کند، نمودار f^{-1} محور yها را در m قطع می‌کند و بالعکس.

تست اگر $f(x)=x+\sqrt[3]{x}+m+1$ و نقطهٔ $(5,1)$ روی نمودار f^{-1} باشد، نمودار f^{-1} محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $(1,\circ)$ ۲) $(2,\circ)$ ۳) $(3,\circ)$ ۴) $(4,\circ)$

پاسخ ۳ اول از این‌که $(5,1)$ روی f^{-1} است، نتیجه می‌گیریم $(1,5)$ روی نمودار f است؛ یعنی $f(1)=5$. پس داریم: $1+\sqrt[3]{1}+m+1=5$ و بنابراین $m=2$.

حالا قرار است f^{-1} محور طول‌ها را قطع کند پس دنبال نقطهٔ $(b,\circ)$ روی f^{-1} هستیم. یعنی در تابع f، نقطهٔ $(\circ,b)$ را می‌خواهیم.

$$\xrightarrow{m=2} f(x)=x+\sqrt[3]{x}+3 \xrightarrow{x=\circ} f(\circ)=b=3$$

پس f^{-1} از نقطهٔ $(3,\circ)$ می‌گذرد.

دامنه و برد تابع وارون

چون xهای f^{-1} همان yهای f هستند و بالعکس، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که دامنهٔ تابع f^{-1} همان برد تابع f است. همچنین برد تابع f^{-1} نیز همان دامنهٔ تابع f است. به زبان ریاضی داریم:

$$D_{f^{-1}}=R_f \text{ و } R_{f^{-1}}=D_f$$

تست اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x^2-x}$ باشد، برد $g(x)$ کدام است؟

۱) $[\circ,1]$ ۲) $\mathbb{R}-[\circ,1]$ ۳) $\mathbb{R}-(\circ,1)$ ۴) $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$

پاسخ ۳ $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است، پس برد آن برابر دامنهٔ تابع $f(x)$ است که می‌شود:

$x^2-x\geq\circ \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}$

x		۰		۱	
x^2-x	+	۰	−	۰	+

$$R_g=D_f=\mathbb{R}-(\circ,1)$$

تعیین ضابطهٔ تابع وارون

گفتیم که برای تعیین ضابطهٔ $f^{-۱}$، در ضابطهٔ تابع f جای x و y را عوض می‌کنیم. بعد باید عبارت حاصل را مرتب کنیم و یادمان نرود که دامنهٔ $f^{-۱}$، برد f بود. مثلاً وارون تابع با ضابطهٔ $y=۲x^۵-۱$ را می‌خواهیم. جای x و y را عوض می‌کنیم و به $x=۲y^۵-۱$ می‌رسیم. حالا آن را مرتب می‌کنیم:

$$x+۱=۲y^۵ \Rightarrow y^۵=\frac{x+۱}{۲} \Rightarrow y=\sqrt[۵]{\frac{x+۱}{۲}}$$

البته می‌توانستیم این‌طور هم بگوییم: اول x را برحسب y پیدا می‌کنیم:

$$y=۲x^۵-۱ \Rightarrow x^۵=\frac{y+۱}{۲} \Rightarrow x=\sqrt[۵]{\frac{y+۱}{۲}}$$

و در آخر جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt[۵]{\frac{x+۱}{۲}}$$

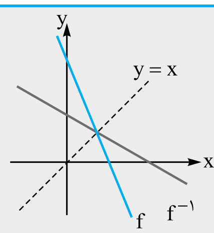
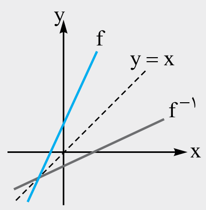
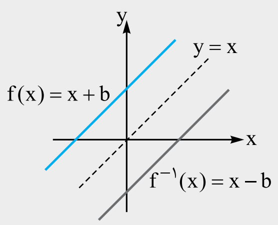
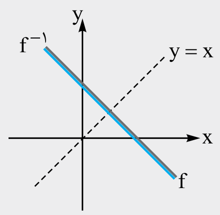
اول بریم سراغ تابع‌های مهم!

وارون تابع خطی

اگر $f(x)=y=ax+b$ باشد (با شرط $a\neq ۰$)، وارون آن می‌شود:

$$f^{-۱}(x)=y=\frac{x-b}{a}$$

پس وارون تابع خطی نیز یک تابع خطی است و شیب آن‌ها عکس یکدیگر است. مثلاً اگر شیب خط ۲ باشد، شیب وارون آن $\frac{۱}{۲}$ است. در حالتی که شیب خط برابر ۱+ یا ۱− باشد، اتفاقات جالبی رخ می‌دهد که در جدول زیر می‌بینیم:

رابطهٔ شیب و وارون	اگر شیب خط ±۱ نباشد، حتماً وارونش را در یک نقطه روی $y=x$ قطع می‌کند.	اگر شیب خط برابر ۱ باشد، خط و وارونش با هم موازی‌اند.	در خط $y=x$ و هر خطی که شیب آن برابر ۱− باشد، خط و وارونش بر هم منطبق‌اند.
نمودار	 		

تست وارون تابع خطی f، به صورت یک خط با شیب ۲ است. اگر $f(۰)=۲$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۱)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ ۱ وقتی شیب وارون f، ۲ است شیب خود f حتماً $\frac{۱}{۲}$ بوده، $f(۰)$ هم برابر ۲ است، پس:

$$f(x)=\frac{۱}{۲}x+۲$$

حالا مقدار $f^{-۱}(۱)$ را می‌خواهیم:

راه I چه عددی به $\frac{۱}{۲}x+۲$ بدهیم تا جواب آن ۱ شود؟

$$\frac{۱}{۲}x+۲=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x=-۱ \Rightarrow x=-۲$$

راه II $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ را وارون کنیم:

$$x=\frac{۱}{۲}y+۲ \Rightarrow x-۲=\frac{۱}{۲}y \Rightarrow y=f^{-۱}(x)=۲x-۴$$

حالا:

$$\xrightarrow{x=۱} y=f^{-۱}(۱)=۲\times۱-۴=-۲$$

وارون تابع هموگرافیک

در تابع هموگرافیک $f(x)=y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به راحتی می‌توانیم ضابطهٔ $f^{-۱}$ را پیدا کنیم. اگر جای y و x را عوض و سپس مرتب کنیم، می‌شود:

$$f^{-۱}(x)=y=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

حفظ می‌کنند که: جای a و d را عوض و هر دو را قرینه می‌کنیم، مثلاً وارون $y=\frac{۷x-۱}{۲x-۵}$ می‌شود $y=\frac{+۵x-۱}{۲x-۷}$.

نکته اگر a و d (ضریب x صورت و عدد ثابت مخرج) قرینهٔ هم باشند، وارون تابع هموگرافیک خودش می‌شود. مثلاً تابع در $f(x)=\frac{3x-1}{5x-3}$، $a=3$ و $d=-3$ یعنی قرینهٔ هم هستند، پس f^{-1} همان f است: $f^{-1}(x)=\frac{3x-1}{5x-3}$

$y=\frac{1}{x}$ بهترین مثال این نکته است.

تست اگر وارون تابع $f(x)=\frac{x-m}{x-m^2}$ خودش باشد، مقدار $f^{-1}(7)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۷ ۴) ۱

پاسخ باید a و d قرینهٔ هم باشند. a برابر ضریب x صورت یعنی ۱ است و d همان عدد ثابت مخرج یعنی $-m^2$ است. پس داریم:

$$-m^2=-1 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=1 \text{ یا } -1$$

دقت کنید که به ازای $m=1$ تابع اصلاً هموگرافیک نمی‌شود ($\frac{x-1}{x-1}$ که هموگرافیک نیست!) پس $m=-1$ و داریم:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

حالا مقدار $f^{-1}(7)$ را می‌خواهیم. چون f و f^{-1} بر هم منطبق‌اند، $f^{-1}(7)$ همان $f(7)$ است که می‌شود

$$\frac{7+1}{7-1}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

نکته گفتیم در حالت $a+d=0$ تابع هموگرافیک بر وارونش منطبق می‌شود. اگر $a+d\neq 0$ باشد، وارونش را قطع نمی‌کند و یا حتماً روی $y=x$ قطع می‌کند. وقتی می‌پرسند تابع هموگرافیک، کجا وارونش را قطع می‌کند، راه عادی این است که تابع را مساوی وارون آن قرار دهیم اما کار بهتر این است که به جای حل $f^{-1}=f$، f را مساوی x قرار دهیم.

تست تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$ و وارونش در دو نقطه متقاطع‌اند. مجموع طول این نقاط چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) -3

پاسخ راه I اول تابع را وارون کنیم:

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1} \xrightarrow[\text{و هر دو را قرینه کنیم}]{\text{جای ۲ و ۱− را عوض}} f^{-1}(x)=\frac{1x+3}{x-2}$$

حالا f را با f^{-1} تقاطع می‌دهیم:

$$\frac{2x+3}{x-1}=\frac{x+3}{x-2} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} 2x^2-4x+3x-6=x^2+2x-3 \Rightarrow x^2-3x-3=0 \xrightarrow{\text{مجموع‌ریشه‌ها}} -\frac{b}{a}=3$$

راه II حالا از آن روش بهتر می‌رویم. قرار شد در تلاقی تابع هموگرافیک و وارونش (وقتی بر هم منطبق نیستند) به جای $f^{-1}=f$، تابع f را مساوی x قرار دهیم:

$$\frac{2x+3}{x-1}=x \Rightarrow x^2-x=2x+3 \Rightarrow x^2-3x-3=0 \xrightarrow{\text{مجموع ریشه‌ها}} -\frac{b}{a}=3$$

وارون تابع $y=\sqrt{ax+b}$

وارون تابع $\sqrt{x}$ و انتقال‌های آن، همیشه قسمتی از یک سهمی است. مثلاً وارون خود $y=\sqrt{x}$، نیمهٔ راست سهمی $y=x^2$ است.

در این‌جا خیلی مهم است که جلوی ضابطهٔ تابع وارون، دامنهٔ آن را بنویسیم (برد خود تابع را بنویسیم). مثلاً می‌خواهیم $y=\sqrt{x-1}+1$ را وارون کنیم:

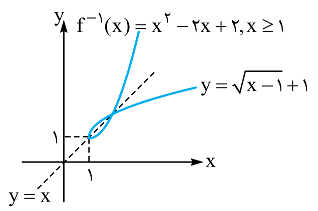
$$y=\sqrt{x-1}+1 \Rightarrow \sqrt{x-1}=y-1 \Rightarrow x-1=(y-1)^2 \Rightarrow x=y^2-2y+1+1 \Rightarrow x=y^2-2y+2$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x^2-2x+2$$

حالا حتماً باید برد تابع $y=\sqrt{x-1}+1$ یعنی مجموعهٔ $[1,+\infty)$ را به عنوان شرط دامنه برای تابع وارون بنویسیم. یعنی جواب درست ضابطهٔ تابع وارون می‌شود:

$$f^{-1}(x)=x^2-2x+2, x\geq 1$$

نمودار را هم ببینید:



تست ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=1-\sqrt{-x+3}$ کدام است؟

۱) $-x^2+2x-2, x\leq 1$ ۲) $-x^2+2x+2, x\leq 1$ ۳) $-x^2+2x-2, x\leq 3$ ۴) $-x^2+2x+2, x\leq 3$

پاسخ اول دقت کنیم که برد تابع $f(x)=1-\sqrt{-x+3}$ فقط شامل yهای کم‌تر یا مساوی ۱ است. پس شرط دامنهٔ تابع وارون باید $x\leq 1$ باشد که در گزینه‌های ۱ و ۲ درست گفته است. حالا جای x و y را عوض کنیم:

$$y=1-\sqrt{-x+3} \xrightarrow[\text{عوض کنیم}]{\text{x و y را}} x=1-\sqrt{-y+3} \Rightarrow 1-x=\sqrt{3-y} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1-2x+x^2=3-y \Rightarrow y=-x^2+2x+2$$

پس جواب می‌شود:

$$f^{-1}(x)=-x^2+2x+2, x\leq 1$$

• **به دست آوردن f^{-1} از روی گزینه‌ها** • بهترین راه به دست آوردن تابع وارون در تست‌ها، استفاده از گزینه‌ها است فقط کافی است به دو مورد زیر توجه کنید:

(۱) دامنهٔ تابع f، برد تابع f^{-1} است و برد تابع f، دامنهٔ تابع f^{-1} خواهد بود.

(۲) اگر نقطهٔ (a,b) عضو تابع f باشد، حتماً نقطهٔ (b,a) عضو تابع f^{-1} خواهد بود و برعکس.

به عنوان مثال یک بار دیگر تست قبل را ببینید. اگر $x=۲$ قرار دهیم، داریم $f(۲)=۰$ پس ضابطه‌ای درست است که به ازای $x=۰$ بشود ۲ (چون $f^{-1}(۰)=۲$) و در نتیجه گزینه‌های (۱) و (۳) حذف می‌شوند. در گزینه‌های (۲) و (۴) ضابطه‌ها با هم برابر هستند و فقط دامنه‌هایشان متفاوت است. حالا باید برد تابع $f(x)=۱-\sqrt{-x+۳}$ را به دست بیاوریم، این شکلی:

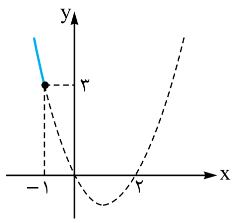
$$\sqrt{-x+۳}\ge ۰ \xrightarrow{\text{ضرب در } -۱} -\sqrt{-x+۳}\le ۰ \xrightarrow{\text{جمع با یک}} \underbrace{۱-\sqrt{-x+۳}}_{f(x)}\le ۱ \Rightarrow \text{برد}:(-\infty,۱]$$

پس دامنهٔ f^{-1} باید $x\le ۱$ باشد، در نتیجه (۲) درست است.

وارون تابع درجه‌دو

سهمی در کل دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست و در نتیجه وارون‌پذیر هم نیست، اما با تحدید دامنه، یک‌به‌یک می‌شود و تابع وارون آن به صورت رادیکالی است.

مثلاً می‌خواهیم $y=x^۲-۲x$ را برای $x\le -۱$ وارون کنیم:



$$y=x^۲-۲x\ (x\le -۱) \xrightarrow{\text{وارون}} x=y^۲-۲y\ (y\le -۱)$$

$$\xrightarrow[\text{تا مربع‌کامل شود}]{\text{به دو طرف ۱ اضافه کنیم}} x+۱=y^۲-۲y+۱=(y-۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{x+۱}=|y-۱|$$

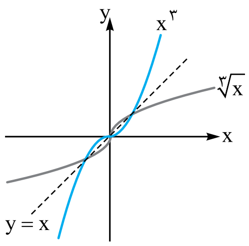
آهان، دقت کردید که شرط $(x\le -۱)$ را هم وارون کردیم و نوشتیم $y\le -۱$؟ حالا این شرط به دردمان می‌خورد که در عبارت $|y-۱|$، قدرمطلق را با علامت منفی برداریم: $\Rightarrow \sqrt{x+۱}=-(y-۱)=۱-y \Rightarrow y=۱-\sqrt{x+۱}$

برد تابع $y=x^۲-۲x$ با دامنهٔ $x\le -۱$ به صورت $[۳,+\infty)$ است، پس ضابطهٔ تابع وارون می‌شود:

$$f^{-1}(x)=۱-\sqrt{x+۱}\ ;\ x\ge ۳$$

اشاره یادتان نرود که در مقابل ضابطهٔ وارون باید دامنهٔ آن یعنی برد f را بنویسید.

وارون تابع درجه‌سه



وارون $y=x^۳$ به صورت $y=\sqrt[۳]{x}$ است. آن‌ها را در یک دستگاه کنار هم ببینید:

(۱) f و f^{-1} هر دو صعودی با دامنه و برد $\mathbb{R}$ هستند (۲) همدیگر را در $(-۱,-۱)$، $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ قطع می‌کنند.

برای وارون‌کردن سایر تابع‌های درجه‌سوم باید حتماً آن‌ها را به شکل $y=a(x-x_۱)^۳+b$ دربیاوریم وگرنه نمی‌توانیم وارون را پیدا کنیم. پس اگر عبارتی به شکل اتحاد بازشده دادند، اول باید اتحاد را بسازیم. ببینید:

تست وارون تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x$ به کدام صورت است؟

۱) $\sqrt[۳]{x-۲}+۸$ ۲) $\sqrt[۳]{x+۲}-۸$ ۳) $\sqrt[۳]{x-۸}-۲$ ۴) $\sqrt[۳]{x-۸}+۲$

پاسخ ۴ **راه I** در تابع اصلی $f(۰)=۰$ است، پس در وارون هم باید $f^{-1}(۰)=۰$ باشد که فقط به (۴) می‌خورد.

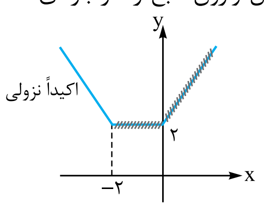
راه II ضریب‌های -۶ و ۱۲ و مقایسهٔ قیافهٔ عبارت‌ها با اتحاد $x^۳-۳ax^۲+۳a^۲x-a^۳$ نشان می‌دهد این تابع به اتحاد $(x-۲)^۳$ شبیه می‌شود.

$$f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸+۸ \Rightarrow f(x)=(x-۲)^۳+۸$$

حالا وارون: $y=(x-۲)^۳+۸ \Rightarrow (x-۲)^۳=y-۸ \Rightarrow x-۲=\sqrt[۳]{y-۸} \Rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۸}+۲ \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt[۳]{x-۸}+۲$

وارون توابع قدرمطلق‌دار

تابع‌های قدرمطلقی معمولاً یک‌به‌یک نیستند و بیشتر اوقات آن‌ها را در یک بازهٔ خاص وارون می‌کنیم. معمولاً صورت سؤال وارون تابع را در بازه‌ای که صعودی یا نزولی باشد، می‌خواهد.

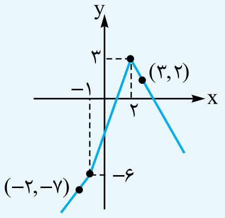


مثلاً $y=|x|+|x+۲|$ در کل دامنه‌اش یک‌به‌یک نیست. اما در بازهٔ $(-\infty,-۲)$ اکیداً نزولی و یک‌به‌یک است. در این بازه، داخل قدرمطلق‌ها منفی‌اند و داریم: $y=-x-(x+۲)=-۲x-۲ \xrightarrow{\text{وارون}} x=-۲y-۲ \Rightarrow y=\dfrac{-x-۲}{۲}$

به عنوان شرط دامنهٔ f^{-1}، برد تابع f را می‌نویسیم: $f^{-1}(x)=\dfrac{-x-۲}{۲}\ ,\ x>۲$

تست | وارون تابع $f(x)=|x+۱|-|۲x-۴|$ در بازه‌ای که اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

۱) $x+۵, x<۳$ ۲) $-x+۵, x<۳$ ۳) $x+۵, x>۲$ ۴) $-x+۵, x>۲$



پاسخ ۲ | رسم نمودار این تابع را بلدیم. نقاط شکستگی $(-۱,-۶)$ و $(۲,۳)$ هستند و نقاط کمکی بعد و قبل، $(۳,۲)$ و $(-۲,-۷)$ هستند.

تابع برای $x>۲$ با برد $(-\infty,۳)$ اکیداً نزولی است. پس حتماً شرط دامنه در ضابطهٔ وارون آن $x<۳$ باید باشد.

حالا با xهای بیشتر از ۲، درون قدرمطلق‌ها مثبت است و ضابطهٔ تابع $y=(x+۱)-(۲x-۴)=-x+۵$ خواهد بود که وارون آن می‌شود خودش (چرا؟). $f^{-۱}(x)=-x+۵\,,\,x<۳$

وارون توابع نمایی و لگاریتمی

در فصل لگاریتم و نمایی خوانده‌ایم که توابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=\log_a x$ وارون هم هستند.

برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون توابع نمایی یا لگاریتمی هم همان ماجرای همیشگی را داریم. جای x و y را عوض می‌کنیم و... ببینید:

$$y=\log_۲(x-۱)\xrightarrow{\text{عوض x و y}}x=\log_۲(y-۱)\xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}}۲^x=y-۱\Rightarrow y=۲^x+۱$$

تست | وارون تابع $f(x)=۲^{x+۱}-۱$ کدام ضابطه را دارد؟

۱) $\log_۲(x+۱)-۱$ ۲) $\log_۲(x-۱)-۱$ ۳) $\log_۲(x-۱)+۱$ ۴) $\log_۲(x+۱)+۱$

پاسخ ۱ | **عددگذاری** به ازای $x=۱$ داریم $f(۱)=۲^۲-۱=۳$. پس گزینه‌ای درست است که در تابع $f^{-۱}$ به ازای $x=۳$، ۱ بدهد که فقط در ۱ این‌طور است.

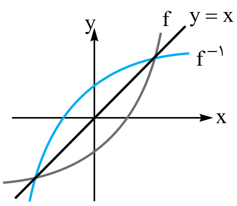
$$f^{-۱}(x)=\log_۲(x+۱)-۱\Rightarrow f^{-۱}(۳)=\log_۲ ۴-۱=۲-۱=۱\ \checkmark$$

راه II | جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$f(x)=۲^{x+۱}-۱\xrightarrow{\text{جا عوض}}x=۲^{y+۱}-۱\Rightarrow x+۱=۲^{y+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{از دو طرف }\log_۲\text{ بگیریم}}\log_۲(x+۱)=\log_۲ ۲^{y+۱}=y+۱\Rightarrow y=\log_۲(x+۱)-۱$$

تلاقی f و $f^{-۱}$

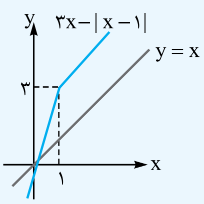


یادمان نرفته f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ هم هستند.حالا دو حالت داریم:

(۱) اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، وارونش را فقط روی $y=x$ قطع می‌کند. یعنی به جای برخورد f و $f^{-۱}$، دنبال نقاط برخورد $f(x)$ و x می‌گردیم. پس باید $x=f(x)$ قرار دهیم و xها را پیدا کنیم و تمام. **مثلاً** $y=\sqrt{x+۲}$ اکیداً صعودی است و می‌خواهیم ببینیم وارونش را کجا قطع می‌کند. باید بنویسیم $\sqrt{x+۲}=x$ و از این معادله $x=۲$، طول نقطهٔ برخورد f و $f^{-۱}$ به دست می‌آید. دقت کنید که عرض نقطهٔ برخورد هم ۲ است.

تست | اگر $f(x)=۳x-|x-۱|$، آن‌گاه f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱



پاسخ ۲ | نمودار $f(x)=۳x-|x-۱|$ را رسم می‌کنیم و می‌بینیم اکیداً صعودی است پس کافی است آن را با $y=x$ تلاقی دهیم:

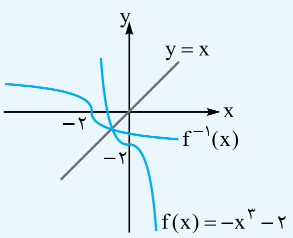
$$۳x-|x-۱|=x\Rightarrow|x-۱|=۲x\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۲x\Rightarrow x=-۱ & \text{غ‌ق‌ق (جواب قدرمطلق منفی نمی‌شود)}\\ x-۱=-۲x\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

پس فقط در نقطهٔ $(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳})$ تابع و وارونش متقاطع‌اند.

(۲) اگر تابع f اکیداً صعودی نباشد، غیر از نقاط برخوردش با $y=x$ در هر نقطهٔ دیگری هم می‌تواند وارونش را قطع کند. پس باید معادلهٔ $f=f^{-۱}$ را حل کنیم، برای حل این معادله بهتر است که شکل f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه بکشیم و ببینیم در چه نقاطی متقاطع‌اند.

تست | اگر $f(x)=-x^۳-۲$ باشد، f و $f^{-۱}$ در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳



پاسخ ۲ | چون f، اکیداً صعودی نیست، پس بهتر است f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه رسم کنیم:

دو تابع در یک نقطه روی نیمساز ناحیهٔ سوم متقاطع‌اند.

نکته این را هم در ذهن داشته باشید که اگر f و f^{-1} در نقطهٔ (a,b) متقاطع باشند، این نقطه در هر دو تابع صدق می‌کند یعنی هم $f(a)=b$ و هم $f^{-1}(a)=b$ است. به بیان ساده‌تر باید نقطه‌های (a,b) و (b,a) در f صدق کنند.

تلاقی $f^{-۱}$ با تابع دیگری مثل g

اگر محاسبهٔ $f^{-۱}$ سخت بود، می‌توانیم به جای تلاقی $f^{-۱}$ با g، مسئله را کلاً وارون کنیم و به جای «برخورد $f^{-۱}$ با g» برخورد تابع f با $g^{-۱}$ را بررسی کنیم. مثلاً اگر سؤال گفته «$f^{-۱}$، خط $g: y=۲x$ را کجا قطع می‌کند؟» ما ببینیم «f، خط $g^{-۱}: y=\frac{x}{۲}$ را کجا قطع می‌کند». فقط حواستان باشد که با این کار، جای x و y را عوض کرده‌ایم! پس xای که به دست می‌آوریم در واقع عرض نقطهٔ تلاقی است! تست زیر را ببینید:

تست اگر $x>۰$; $f(x)=x^۳+x$، آن‌گاه نمودار تابع $f^{-۱}$ خط $y=\frac{x}{۳}$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(\sqrt{۲},۳\sqrt{۲})$ ۳) $(۳,۱)$ ۴) $(۳\sqrt{۲},\sqrt{۲})$

پاسخ ۴ خب قرار شد به جای حل این سؤال بگوییم: «نمودار تابع f خط $x=\frac{y}{۳}$ را در کدام نقطه قطع می‌کند؟»

$$\begin{cases} x^۳+x=f(x) \\ ۳x=y \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^۳+x=۳x \Rightarrow x^۳=۲x \xrightarrow{x>۰} x=\sqrt{۲}$$

پس در نقطه با طول $\sqrt{۲}$، خود f و خط $y=۳x$ متقاطع‌اند. پس محل تلاقی $f^{-۱}$ و خط $y=\frac{x}{۳}$ می‌شود نقطه‌ای به عرض $\sqrt{۲}$ که مختصاتش می‌شود: $(۳\sqrt{۲},\sqrt{۲})$

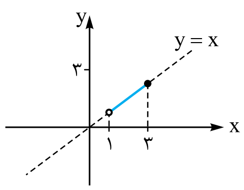
ترکیب تابع و وارونش

وقتی تابع و وارونش را ترکیب کنیم به تابع همانی $(f(x)=x)$ می‌رسیم، در $fof^{-۱}(x)$ باید x را اول به $f^{-۱}$ بدهیم پس x عضو دامنهٔ $f^{-۱}$ یعنی عضو برد f است اما در $f^{-۱}of(x)$ اول f روی x عمل می‌کند پس باید $x\in D_f$ باشد. ببینید:

$$fof^{-۱}(x)=x,(x\in R_f) \quad , \quad f^{-۱}of(x)=x,(x\in D_f)$$

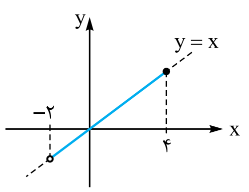
پس $f^{-۱}of$ و $fof^{-۱}$ هر دو، قسمتی از تابع همانی $y=x$ هستند و همواره در نمایش زوج مرتبی آن‌ها، فقط زوج مرتب‌های به صورت (x,x) وجود دارند.

مثلاً اگر تابع f دامنه‌اش $[-۲,۴)$ و بردش $(۱,۳]$ باشد، نمودارهای $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ به صورت مقابل هستند:



$y=fof^{-۱}(x)=x$

دامنه $=R_f=(۱,۳]$



$y=f^{-۱}of(x)=x$

دامنه $=D_f=(-۲,۴]$

اشاره حواسمان هست که برای رسم $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ به نمودار یا ضابطهٔ f احتیاجی نداریم، چون می‌دانیم که نمودار آن‌ها $y=x$ است و فقط دامنه و برد f را می‌خواهیم.

تست اگر $f=\{(۳,۴),(-۱,۱),(۲,۰)\}$ باشد، چندتا از زوج‌های مرتب مقابل در $f^{-۱}of$ هستند؟ $(۴,۴),(۳,۳),(۰,۰),(۲,۲),(۱,۱)$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ ۴ $f^{-۱}of$ تابع همانی با دامنهٔ D_f است. پس xهای f را داریم یعنی $f^{-۱}of=\{(۳,۳),(-۱,-۱),(۲,۲)\}$ و از بین زوج‌های موجود ۲تای آن‌ها هستند.

نکته گاهی اوقات به جای تابع وارون، در صورت سؤال بیان‌های دیگری به کار می‌رود. حواستان باشد که تمام این‌ها معادل‌اند.
با قرینه‌کردن f نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، تابع g به دست می‌آید.

- تابع g در شرایط $fog=x$ و $gof=x$ صدق می‌کند.
- g وارون f است.
- g از تعویض جای مؤلفه‌های زوج‌های مرتب f به دست می‌آید.

تست اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و تابع g طوری انتخاب شود که $fog(x)=x$ و $gof(x)=x$، آن‌گاه مقدار $g(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

پاسخ ۳ صورت سؤال یعنی g وارون f است پس $f^{-1}(\frac{1}{2})$ را می‌خواهیم و باید f را مساوی $\frac{1}{2}$ قرار دهیم:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{1}{4}\xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}}x^2+1=4x^2\Rightarrow 3x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\xrightarrow{x>0}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

اشاره حواسمان هست که در رابطهٔ $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}$ مقدار x حتماً مثبت است.

وارون تابع مرکب

وارون تابع fog به صورت $g^{-1}of^{-1}$ است. یعنی:

$$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$$

یعنی تک‌تک تابع‌ها را وارون و جای آن‌ها را با هم عوض می‌کنیم. برای درک بهتر فرض کنید در یک فیلم می‌بینید که در باز شده (تابع اول) و شخصی وارد می‌شود (تابع دوم). اگر تابع را وارون کنید (فیلم را برعکس پخش کنید) ابتدا شخص به عقب برمی‌گردد (تابع دوم وارون می‌شود) و سپس در بسته می‌شود (تابع اول وارون می‌شود).

تست اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{9x+6}{1-x}$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(20)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ ۱ می‌دانیم $(g^{-1}of^{-1})=(fog)^{-1}$، پس $(g^{-1}of^{-1})(20)=(fog)^{-1}(20)$ حالا اگر فرض کنیم $(fog)^{-1}(20)=a$ باید $(fog)(a)=20$ باشد، پس:

$$(fog)(a)=20\Rightarrow f(g(a))=20\xrightarrow{f(x)=x+\sqrt{x}}(g(a))+\sqrt{g(a)}=20\xrightarrow[\text{جای } g(a)]{\text{عددگذاری به}}g(a)=16$$

$$\xrightarrow{g(x)=\frac{9x+6}{1-x}}\frac{9a+6}{1-a}=16\Rightarrow 9a+6=16-16a\Rightarrow 25a=10\Rightarrow a=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$

برای حسن ختام، یک تست ترکیبی از تابع مرکب و وارون را هم ببینیم:
شبیه این تست در کنکورهای سراسری رشته‌های تجربی و ریاضی سال‌های اخیر، چندین‌بار تکرار شده است.

تست اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-1}of)-f$ کدام است؟

۱) $\{-1,4\}$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\{3,4\}$ ۴) $\{2,-1\}$

پاسخ ۴ اول با استفاده از f و g تابع‌های g^{-1} و $g^{-1}of$ را پیدا می‌کنیم:

$$g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$$
$$g^{-1}=\{(3,2),(2,4),(6,5),(1,3)\}\Rightarrow gof^{-1}=\{(1,4),(4,5)\}$$
$$f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$$

حالا $g^{-1}of-f$ را پیدا می‌کنیم:

$$g^{-1}of=\{(1,4),(4,5)\}\qquad f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$$
$$\Rightarrow g^{-1}of-f=\{(1,4-2),(4,5-6)\}=\{(1,2),(4,-1)\}$$

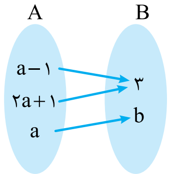
پس برد $g^{-1}of-f$ شامل اعضای ۲ و -1 است.

درس نهم: تابع یک‌به‌یک

۴۰۶- اگر رابطهٔ $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^۲-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۴۰۷- اگر تابع زیر یک‌به‌یک باشد، کدام نتیجه درست است؟



۱) $a=-۲$ و $b\neq ۳$

۲) $a=-۲$ و $b=۳$

۳) $a\neq -۲$ و $b\neq ۳$

۴) $a\neq -۲$ و $b=۳$

۴۰۸- کدام‌یک از توابع زیر، یک‌به‌یک است؟

۱) $y=-x^۲+۱$ ۲) $y=(x-۱)^۳+۲$ ۳) $y=\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ \sqrt{x} & x\geq ۰ \end{cases}$ ۴) $y=\begin{cases} x^۲+۲x & x\geq ۱ \\ x+۵ & x<۱ \end{cases}$

۴۰۹- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^3|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، چگونه است؟ (خارج ۹۵)

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون‌ناپذیر ۴) یک‌به‌یک

کدام تابع وارون‌پذیر است، یعنی کدام تابع یک‌به‌یک است! و حواسمان هست که توابع اکیداً یکنوا حتماً یک‌به‌یک هستند.

۴۱۰- کدام تابع وارون‌پذیر است؟

۱) $y=x-2|x|$ ۲) $y=x[x]$ ۳) $y=x|x|$ ۴) $y=x-[x]$

۴۱۱- کدام تابع، تابع وارون ندارد؟

۱) $y=2^x$ ۲) $y=\log x$ ۳) $y=\frac{2x+4}{x+2}$ ۴) $x=x+[x]$

۴۱۲- کدام‌یک از توابع زیر، یک‌به‌یک است؟

۱) $y=x^2+2\sqrt{x}$ ۲) $y=2x+\frac{1}{x}$ ۳) $y=|\sqrt{x}-2|$ ۴) $y=x-\sqrt{x}$

۴۱۳- توابع زیر از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند. کدام‌یک از آن‌ها معکوس‌پذیر است؟ (خارج ۸۹)

۱) $y=x^4-2x^2$ ۲) $y=[x]$ ۳) $y=x^3-3x^2$ ۴) $y=x^3+x+1$

۴۱۴- اگر $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\ge 1\\ 2x+b & x<1\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، کدام مقدار برای b قابل قبول است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۱ ۴) ۳

۴۱۵- اگر $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\ge 2\\ g(x) & x<2\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، کدام ضابطه برای g مناسب است؟

۱) x^3 ۲) x^2-1 ۳) x ۴) $x+2$

۴۱۶- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge a\\ 2x+1 & x<a\end{cases}$ یک‌به‌یک است. مقدار a کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

محدودکردن دامنه برای ساختن تابع یک‌به‌یک

۴۱۷- در تابع $f(x)=x^2-3x+5$ با محدودکردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازهٔ زیر، می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟

۱) $[1,5]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $[-7,1]$ ۴) $[-2,2]$

۴۱۸- تابع $f(x)=(x-1)(x+3)+x$ در بازهٔ $[a,+\infty)$ یک‌به‌یک است، حداقل مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۴۱۹- تابع $f(x)=x^2-4x+3$ با کدام دامنه معکوس‌پذیر است؟

۱) $[-2,3]$ ۲) $[0,2]\cup(5,6]$ ۳) $[0,1]\cup[2,4]$ ۴) $[1,5]$

۴۲۰- تابع $f(x)=(a-1)x^2-2x+(a+4)$ بر روی $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است. مقدار $af(2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

۴۲۱- در کدام بازه هر دو تابع $f(x)=-x(x-4)$ و $g(x)=|x-3|+2$، یک‌به‌یک هستند؟

۱) $[0,3]$ ۲) $(2,+\infty)$ ۳) $[2,4]$ ۴) $[-1,2]$

۴۲۲- تابع $f(x)=|x+1|-|x-1|$ در بازهٔ $[a,b]$، یک‌به‌یک است. حداکثر $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۲۳- اگر $f(x)=\begin{cases}g(x) & x\ge 1\\ -x^2 & x<0\end{cases}$، با کدام انتخاب برای $g(x)$، تابع f یک‌به‌یک است؟

۱) $|x-2|$ ۲) $x-3$ ۳) x^2-4x+3 ۴) $x+7$

درس دهم: وارون تابع و تابع وارون

۴۲۴- کدام‌یک از جملات زیر نادرست است؟ (کتاب درسی)

۱) برای رسم f^{-1} باید نمودار f را نسبت به $y=x$ قرینه کنیم.

۲) برد f^{-1} همان دامنهٔ f است.

۳) اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$.

۴) اگر f تابع باشد، f^{-1} هم حتماً تابع است.

در تمامی تست‌های این قسمت، یک نکته بیشتر نداریم: اگر $(a,b)\in f$ باشد، آن‌گاه $(b,a)\in f^{-1}$ است یا به عبارتی اگر $f(a)=b$ باشد، $f^{-1}(b)=a$ است.

۴۲۵- اگر $f=\{(1,2),(-3,-1),(3,4),(4,-3)\}$ باشد، مقدار $2f^{-1}(-3)+f(3)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۲ ۲) ۱۳ ۳) ۴ ۴) ۱۲

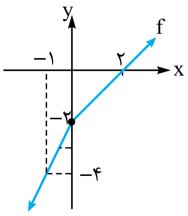
۴۲۶- اگر $f=\{(-۱,۰),(۱,۲),(۰,۱),(۲,-۱)\}$ باشد. آن‌گاه $\frac{f}{f^{-1}}$ شامل چند زوج مرتب است؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۴۲۷- اگر $f=\{(۲,a+۱),(\sqrt{b},۳)\}$ و $f^{-1}=\{(a-۱,c+۱),(d,b-۲)\}$ یک رابطه و وارون آن باشد، حاصل $a+b+c+d$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۴۲۸- با توجه به نمودار تابع f، حاصل $f^{-1}(-۵)+f^{-1}(۴)$ کدام است؟



۱) $۴/۵$

۲) $۳/۵$

۳) $-۴/۵$

۴) $-۳/۵$

۴۲۹- در تابع خطی $f(x)=ax+b$ اگر $f^{-1}(۶)=۱$ و $f^{-1}(۲۱)=۴$، b کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) -۵

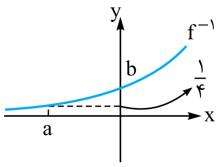
۴۳۰- به ازای چند مقدار a، نمودار تابع وارون $f(x)=\frac{x-۴}{۲x-۱}$ از نقطهٔ $(a+۲,a)$ می‌گذرد؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۴۳۱- وارون تابع $y=x^۳+۲x-۳$، محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۳۲- شکل روبه‌رو، نمودار وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}-\frac{۱}{x}$ است. $a+b$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)



۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$

۳) $-\frac{۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۵}{۴}$

۴۳۳- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(۶)+g(۱۲)$ کدام است؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۴۳۴- اگر $f(x)=\begin{cases} ۴x+۳ & x\ge ۳ \\ x+۱ & x<۳ \end{cases}$، آن‌گاه $f^{-1}(-۵)$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) -۶ ۴) ۴

۴۳۵- اگر $f(x)=f^{-1}(۳)+۲x-۱$ باشد. آن‌گاه $f(۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۹}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

رابطهٔ بین دامنه و برد f و f^{-1} را یادتان هست؟ $R_{f^{-1}}=D_f \, , D_{f^{-1}}=R_f$

۴۳۶- دامنهٔ تابع معکوس تابع $y=۳-|x+۱|$ (با شرط $x\le -۱$) کدام است؟

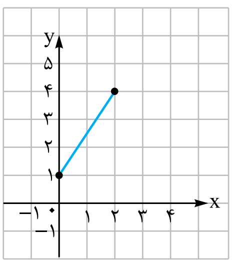
۱) $[۳,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۳]$ ۳) $(-\infty,۲]$ ۴) $[-۱,+\infty)$

۴۳۷- تابع $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$ مفروض است. در تابع $g^{-1}(x)$، دامنه و برد چند عضو صحیح غیرمشترک دارند؟ (کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

نمودار f^{-1}

۴۳۸- ضابطهٔ وارون تابع داده‌شده، کدام است؟ (کتاب درسی)



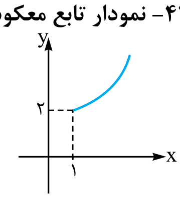
۱) $y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۲}{۳}$

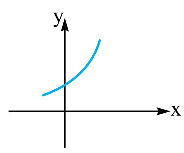
۲) $y=\frac{۲}{۳}x+۱$

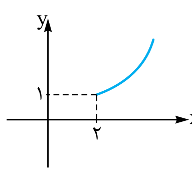
۳) $y=\frac{۳}{۲}x+۱$

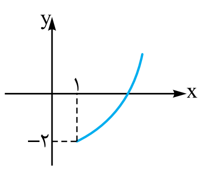
۴) $y=\frac{۳}{۲}x-\frac{۳}{۲}$

۴۳۹- نمودار تابع معکوس تابع $f(x)=۱+\sqrt{x-۲}$ کدام است؟

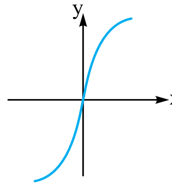
۱) 

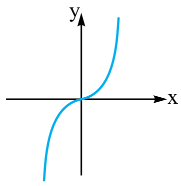
۲) 

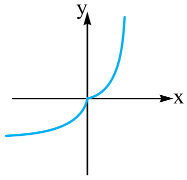
۳) 

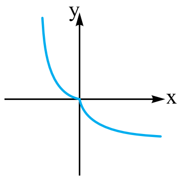
۴) 

۴۴۰- نمایش هندسی تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\ge 0\\ -x^{2} & x<0\end{cases}$ کدام است؟

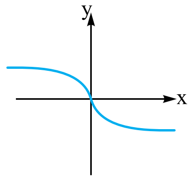
۱) 

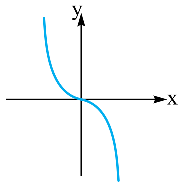
۲) 

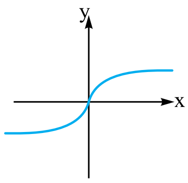
۳) 

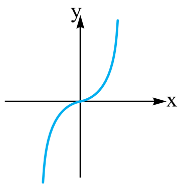
۴) 

۴۴۱- اگر $f(x)=x\,|x|$، آن‌گاه نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

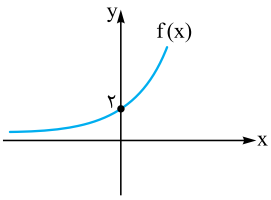
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۴۲- شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f^{-1}(x)}$ کدام است؟



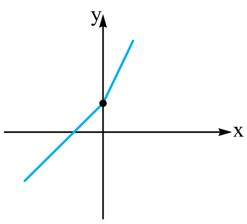
۱) $\mathbb{R}$

۲) $x>۰$

۳) $۲\ge x\ge ۰$

۴) $x\ge ۲$

۴۴۳- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار $۲f^{-1}(x-۱)$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟



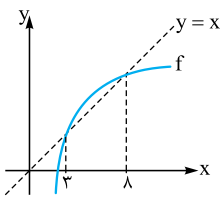
۱) اول

۲) دوم

۳) سوم

۴) چهارم

۴۴۴- شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)



۱) $[۰,۲]$

۲) $[۲,۳]$

۳) $[۲,۸]$

۴) $[۳,۸]$

ضابطهٔ تابع وارون

ابتدا از توابع خطی شروع می‌کنیم که در سال یازدهم خوانده‌ایم. قبل از شروع این قسمت یادآوری می‌کنیم که بازه‌ای که در گزینه‌ها در مقابل ضابطهٔ f^{-1} می‌نویسند، در واقع برد تابع f است.

۴۴۵- تابع معکوس تابع $f(x)=۲x+۴$ با دامنهٔ $[-۱,۳]$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=\dfrac{x+۴}{۲};-۱\le x\le ۳$

۲) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-۴}{۲};-۱\le x\le ۳$

۳) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-۴}{۲};۲\le x\le ۱۰$

۴) $f^{-1}(x)=\dfrac{۱}{۲x+۴};-۱\le x\le \dfrac{۱}{۳}$

۴۴۶- ضابطهٔ تابع وارون $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ ۴x+۱ & x\ge ۰\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲}x+\dfrac{۱}{۲} & x<۰\\[2mm] \dfrac{۱}{۴}x-\dfrac{۱}{۴} & x\ge ۰\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲}x-\dfrac{۱}{۲} & x<۰\\[2mm] \dfrac{۱}{۴}x+\dfrac{۱}{۴} & x\ge ۰\end{cases}$

۳) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲}x-\dfrac{۱}{۲} & x<-۱\\[2mm] \dfrac{۱}{۴}x+\dfrac{۱}{۴} & x\ge ۱\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{۲}x+\dfrac{۱}{۲} & x<-۱\\[2mm] \dfrac{۱}{۴}x-\dfrac{۱}{۴} & x\ge ۱\end{cases}$

۴۴۷- قرینهٔ خط $d_۱$ به معادلهٔ $۳y-۲x=۴$ را نسبت به خط $y=x$، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (سراسری ۹۷)

۱) -۲

۲) -۱

۳) ۱

۴) ۲

۴۴۸- اگر وارون تابع خطی $f(x)=ax+۱$ بر خودش منطبق باشد، a کدام است؟

۱) فقط ۱ ۲) فقط -۱ ۳) ۱ یا -۱ ۴) این اتفاق ممکن نیست.

۴۴۹- اگر دو خط به معادلات $ax+by=۸$ و $۲x-۳y=b$ نسبت به نیمساز ربع اول قرینهٔ یکدیگر باشند، $a+b$ کدام است؟

۱) ± ۳ ۲) ± ۲ ۳) -۳ و ۲ ۴) ۳ و -۲

اگر نکات وارون تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ را یادتان رفته، حتماً درس‌نامه را نگاه کنید.

۴۵۰- تابع وارون تابع $y=\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{x+۱}$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{x}{x-۱}$ ۳) $f^{-۱}(x)=۱-\frac{۱}{x}$ ۴) $f^{-۱}(x)=۱+\frac{۱}{x}$

۴۵۱- اگر تابع $f(x)=\frac{۲x+۳}{x+b}$ وارون خودش باشد، $f(۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

۴۵۲- نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۴}{x-۲}$، با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟ (خارج ۹۶)

۱) -۴ و -۱ ۲) ۴ و -۱ ۳) -۴ و ۱ ۴) ۴ و ۱

در اکثر تست‌های این بخش یک ورودی مثل α را به خود تابع f می‌دهیم و خروجی f را حساب می‌کنیم. خروجی به دست آمده را در گزینه‌ها به $f^{-۱}$ می‌دهیم. حالا باید خروجی $f^{-۱}$، همان α باشد.

۴۵۳- معکوس تابع $f(x)=\sqrt{x+۳}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-۱}(x)=x^۲-۳\,;\,x\geq -۳$ ۲) $f^{-۱}(x)=x^۲-۳\,;\,x\geq ۰$

۳) $f^{-۱}(x)=x^۲+۳\,;\,x\geq -۳$ ۴) $f^{-۱}(x)=x^۲+۳\,;\,x\geq ۰$

۴۵۴- ضابطهٔ معکوس تابع $y=۲-\sqrt{x-۱}$، به کدام صورت است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-۱}(x)=x^۲-۴x+۵\,;\,x\leq ۲$ ۲) $f^{-۱}(x)=-x^۲+۴x-۵\,;\,x\leq ۲$

۳) $f^{-۱}(x)=x^۲-۴x-۵\,;\,x\geq ۱$ ۴) $f^{-۱}(x)=-x^۲+۴x-۵\,;\,x\geq ۱$

۴۵۵- ضابطهٔ تابع معکوس تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵\,;\,x\geq ۲$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۲\,;\,x\geq ۱$ ۲) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۲}-۲\,;\,x\geq -۱$

۳) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}-۱\,;\,x\geq ۲$ ۴) $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۲}-۲\,;\,x\geq ۱$

۴۵۶- وارون تابع $y=x^۲-۲x$ وقتی $x\leq ۱$، به صورت $y=a\sqrt{x+b}+c$ است، حاصل $a+b-c^۲$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۱

۴۵۷- معکوس تابع $y=x^۳+۳x^۲+۳x+۲$ کدام است؟

۱) $y=۱-\sqrt[۳]{x-۱}$ ۲) $y=۱-\sqrt[۳]{x+۱}$ ۳) $y=-۱+\sqrt[۳]{x-۱}$ ۴) $y=-۱-\sqrt[۳]{x+۱}$

۴۵۸- ضابطهٔ وارون تابع $y=x^۴-۲x^۲+۱$ روی دامنهٔ $(-۱,۰)$ کدام است؟

۱) $y=\sqrt{\sqrt{x}+۱}$ ۲) $y=-\sqrt{۱-\sqrt{x}}$ ۳) $y=\sqrt{۱-\sqrt{x}}$ ۴) $y=-\sqrt{\sqrt{x}+۱}$

از این‌جا به بعد توابع چندضابطه‌ای و قدرمطلق وارد تست‌ها می‌شوند. راه اولمان همیشه همان عددگذاری است ولی اگر نشد حتماً سعی می‌کنیم که قدرمطلق را برداریم.

۴۵۹- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$، کدام است؟ (سراسری ۹۶)

۱) $f^{-۱}(x)=-x^۲$ ۲) $f^{-۱}(x)=x^۲$ ۳) $f^{-۱}(x)=x|x|$ ۴) $f^{-۱}(x)=-x|x|$

۴۶۰- در بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x+|x+۲|$ وارون‌پذیر است، ضابطهٔ وارون آن کدام است؟

۱) $y=\frac{x-۲}{۲}\,;\,x\geq -۲$ ۲) $y=\frac{x+۲}{۲}\,;\,x\geq -۲$ ۳) $y=\frac{x-۲}{۲}\,;\,x\geq ۰$ ۴) $y=\frac{x+۲}{۲}\,;\,x\geq ۰$

۴۶۱- تابع با ضابطهٔ $y=x|x-۲|$ در یک بازه، نزولی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه، کدام است؟ (سراسری ۹۴)

۱) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱+x}\,;\,x<۰$ ۲) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x}\,;\,x<۱$

۳) $f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{۱-x}\,;\,۰<x<۱$ ۴) $f^{-۱}(x)=۱-\sqrt{۱-x}\,;\,۰<x<۱$

۴۶۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|$، در یک بازه صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن، در این بازه کدام است؟ (خارج ۹۳)

۱) $f^{-۱}(x)=x+۷\,;\,x>۸$ ۲) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}x+۲\,;\,x>۳$ ۳) $f^{-۱}(x)=x+۷\,;\,x>-۴$ ۴) $f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۲}x-۱\,;\,-۴<x<۸$

۴۶۳- ضابطهٔ وارون تابع $y = 3x - |x|$ کدام است؟

۱) $y = \frac{3x+|x|}{4}$ ۲) $y = \frac{3x+|x|}{8}$ ۳) $y = \frac{x+|x|}{4}$ ۴) $y = \frac{2x-|x|}{4}$

۴۶۴- ضابطهٔ معکوس $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟ (خارج ۹۲)

۱) $f(x) = x\sqrt{|x|} ; x \in \mathbb{R}$ ۲) $f^{-1}(x) = x\sqrt{|x|} ; x \in \mathbb{R} - \{0\}$

۳) $f^{-1}(x) = x|x| ; x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ۴) $f^{-1}(x) = x|x| ; x \in \mathbb{R}$

۴۶۵- ضابطهٔ وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

۱) $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} ; |x| < 1$ ۲) $f^{-1}(x) = \frac{1-|x|}{|x|} ; |x| > 1$

۳) $f^{-1}(x) = \frac{x}{|x|-1} ; |x| > 1$ ۴) $f^{-1}(x) = \frac{|x|-1}{x} ; |x| < 1$

اگر $m^n = t$ باشد، آن‌گاه: $n = \log_m t$

۴۶۶- معکوس تابع $f(x) = 2^x - 1$ کدام است؟

۱) $y = \log_2(x+1)$ ۲) $y = \log_2(x-1)$ ۳) $y = (\log_2 x) + 1$ ۴) $y = (\log_2 x) - 1$

۴۶۷- اگر $f(x) = \log(x-1) - 3$ باشد، ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = 10^{x+1} + 3$ ۲) $f^{-1}(x) = 10^{x+3} + 1$ ۳) $f^{-1}(x) = 10^{x-1} + 3$ ۴) $f^{-1}(x) = 10^{x-3} - 1$

تست بعدی، یکی از سخت‌ترین تست‌های کنکور در ۵۰ سال اخیر است!

۴۶۸- فرض کنید در دامنهٔ $[0,+\infty)$، تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ مفروض باشد، $f^{-1}(2)$، کدام است؟ (سراسری ۹۹)

۱) $\log_2(2-\sqrt{3})$ ۲) $\log_2(\sqrt{3}-1)$ ۳) $\log_2(1+\sqrt{3})$ ۴) $\log_2(2+\sqrt{3})$

نقاط تلاقی f^{-1} با f و توابع دیگر

۴۶۹- نمودار $y = -(x+1)^3 + 1$ معکوس خود را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۴۷۰- طول نقطهٔ تلاقی نمودار $f(x) = \sqrt{x+2}$ با نمودار معکوس آن کدام است؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) -1 و ۲ ۴) فاقد نقطهٔ تلاقی

۴۷۱- نمودار تابع $f(x) = -x^3 + ax + b$ در نقطهٔ $(1,2)$ نمودار وارونش را قطع می‌کند. $f(2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) -1 ۴) ۲

۴۷۲- اگر تابع $f(x) = \sqrt{ax+b}$ تابع وارونش را در $(1,2)$ قطع کند، $a-b$ کدام است؟

۱) -10 ۲) -4 ۳) ۱۰ ۴) ۴

۴۷۳- تابع $f(x) = (a+1)x^4 + (a+2)x^3 + (a+4)x^2 + 3x$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی معکوس‌پذیر است. تابع f^{-1} خط $y = x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷۴- اگر $f(x) = x^3 + x + 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $y = x - 2$ یکدیگر را در نقطهٔ (α,β) قطع می‌کنند. $\alpha + \beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

۴۷۵- تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنهٔ $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیهٔ چهارم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (سراسری ۹۹)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۴۷۶- اگر $f(x) = x^2 - 2x - 3 \quad ; \quad x \geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۴۷۷- تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنهٔ $(-1,+\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع $f(x-1)$ و $f^{-1}(-x)$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

$f^{-1}of$ و fof^{-1}

۴۷۸- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۳)\}$، تابع fof^{-1} کدام است؟

۱) $\{(۲,۲),(۳,۳)\}$ ۲) $\{(۱,۱),(۲,۲)\}$ ۳) $\{(۲,۱),(۳,۲)\}$ ۴) $\{(۱,۱),(۳,۳)\}$

۴۷۹- اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ و g تابعی باشد که $fog(x)=x$، تابع g کدام می‌تواند باشد؟ (کتاب درسی)

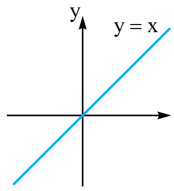
۱) $g=\{(۴,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$ ۲) $g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$

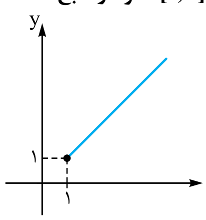
۳) $g=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$ ۴) $g=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۵)\}$

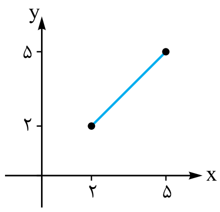
۴۸۰- با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$، اگر $f(x)=۲x-۱$ باشد، $g(۰)$ کدام است؟

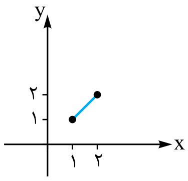
۱) ۱ ۲) صفر ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۴۸۱- در تابع $f(x)$ با دامنهٔ $[۲,۵]$ و برد $[۱,۲]$ نمودار تابع fof^{-1} چگونه است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۸۲- اگر $f(x)=x^۳+\sqrt[۵]{x}+۶$ با دامنهٔ $[-۱,۱]$ تعریف شود، طول پاره‌خط نمودار تابع $fof^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۴۸۳- اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$، آن‌گاه دامنهٔ تعریف تابع $y=\sqrt{۱+f^{-1}of(x)}$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $(-\infty,-۱]$ ۴) $(-\infty,۱]$

تابع مرکب و تابع وارون

۴۸۴- اگر $f(x)=x^۲+x$ و $g(x)=\frac{۵x+۲}{۲x-۱}$، آن‌گاه حاصل $(fog^{-1})(۴)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) ۶ ۲) ۲۰ ۳) ۲ ۴) ۱۲

۴۸۵- اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$، کدام است؟

۱) $\{(۴,۲),(۵,۲)\}$ ۲) $\{(۴,۲),(۳,۵)\}$ ۳) $\{(۵,۲),(۲,۴)\}$ ۴) $\{(۳,۵),(۲,۴)\}$

کتاب درسی شما، وارون fog را خیلی تحویل گرفته ...

۴۸۶- اگر $f=\{(۰,-۱),(۲,\frac{۱}{۲}),(-۳,\sqrt{۲}),(۱,۵)\}$ و $g=\{(-۱,-۳),(۵,۲),(\frac{۱}{۲},۰),(۴,۶)\}$ تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\{(-۱,\frac{۱}{۲}),(۵,۲),(\sqrt{۲},-۳)\}$ ۲) $\{(\frac{۱}{۲},۵),(۵,۲),(-۱,\frac{۱}{۲})\}$

۳) $\{(\sqrt{۲},-۱),(\frac{۱}{۲},۵),(-۱,-۳)\}$ ۴) $\{(-۱,\frac{۱}{۲}),(\frac{۱}{۲},۵),(\sqrt{۲},-۱)\}$

۴۸۷- اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳+x$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(۸)$ کدام است؟ (خارج ۹۸)

۱) $۱/۵$ ۲) ۲ ۳) $۲/۵$ ۴) ۳

۴۸۸- دو تابع $f=\{(۵,۲),(۷,۳),(۱,۴),(۳,۶),(۹,۱)\}$ و $g(x)=\sqrt{۵x+۹}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1}of^{-1})(a)=۸$ باشد، a کدام است؟ (خارج ۹۶)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۴۸۹- اگر $f(x)=x+۲$ و $g(x)=۲x^۲-۸x+۱$ باشند، آن‌گاه حاصل‌جمع ریشه‌های معادلهٔ $(fog^{-1})^{-1}(x)=۰$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) -۱۰ ۳) ۸ ۴) -۸

۴۹۰- اگر $f^{-1}(x)=۱+\sqrt{x}$ و $g^{-1}(x)=x^۲$ و $x\geq ۰$، آن‌گاه ضابطهٔ $fog(x)$ کدام است؟

۱) $x-۱$ ۲) $x^۲-۱$ ۳) $x+۱+۲\sqrt{x}$ ۴) $x+۱-۲\sqrt{x}$

۴۹۱- اگر $f=\{(۲,۳),(-۱,۲),(-۴,۱),(۳,۰)\}$ و $g=\{(۰,۲),(۲,-۴),(۳,۲),(-۴,-۲)\}$، آن‌گاه حاصل $(fogof^{-1})(۳)$ کدام است؟ (کانون فرهنگی آموزش)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۹۲- وارون تابع $y=f(۳x-۱)$ کدام است؟

۱) $y=f^{-1}(\frac{x+۱}{۳})$ ۲) $y=f^{-1}(۳x-۱)$ ۳) $y=۳f^{-1}(x)-۱$ ۴) $y=\frac{f^{-1}(x)+۱}{۳}$

۴۹۳- f تابعی یک‌به‌یک و $g(x)=f(2x+1)+1$ است. اگر $f^{-1}(5)=3$ و $g^{-1}(a)=1$، مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۵ ۴) ۶

۴۹۴- اگر $f(x)=x+[x]$ باشد، حاصل $(fof^{-1})(4/5)$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۶ ۴) موجود نیست.

۴۹۵- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ و $g(x)=k(x-\frac{1}{x})$ وارون هم باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴۹۶- نمودار $f(x)=\frac{x-3}{2}+2\sqrt{x}$ و وارون آن در نقاط A و B متقاطع‌اند. طول پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $4\sqrt{2}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $6\sqrt{2}$ ۴) $8\sqrt{2}$

۴۹۷- وارون تابع $f(x)=x+4\sqrt{x}+8$ به صورت $f^{-1}(x)=x-a\sqrt{x-b} \quad ; \quad x\geq c$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۴۹۸- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ کدام است؟

۱) $y=\log_2\frac{1+x}{1-x}$ ۲) $y=\log_2\frac{x+1}{x-1}$ ۳) $y=\log_x\frac{2+x}{2-x}$ ۴) $y=\log_x\frac{2-x}{2+x}$

۴۹۹- ضابطهٔ وارون تابع $y=f(x)=5^{\log_x 5}$ کدام است؟

۱) $y=5^{\log_5 x}$ ۲) $y=5^x$ ۳) $y=5^{\log_x 5}$ ۴) $y=5^{\frac{1}{x}}$

۵۰۰- اگر $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{2x}$ حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰۱- اگر داشته باشیم: $g(x)=f(2x+5)$ و $f^{-1}(x)=\frac{x^3}{9}+\sqrt[3]{9x}$، آن‌گاه حاصل عبارت $f^{-1}(g^{-1}(f(-1)))$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -2 ۳) -3 ۴) -6